San Fernando College
Departamento de Matemática.
Profesora: Gloria González Tejos

Tercero Límite, Derivadas e Integrales Guía 29

<table>
<tr><td colspan="3">Titulo : Aplicación de derivada</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Nombre:</td><td colspan="2">Fecha 2 de Octubre</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Contenidos
Estudio de funciones derivables</td><td>Objetivo de Aprendizaje
Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento , concavidad puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función a partir del cálculo de la primera y segunda derivada.</td><td>Habilidades
Comprender- Analizar- Calcular</td></tr>
</table>

En esta Guía estudiaremos el comportamiento de una función real en las **proximidades de un punto.**
Recuerda las dudas al correo ggonzalez@sanfernandocollege.cl o al grupo de whatsapp.
Visita el link https://www.youtube.com/watch?v=LRCgUrWgn0o que te ayudará a entender mejor la materia.

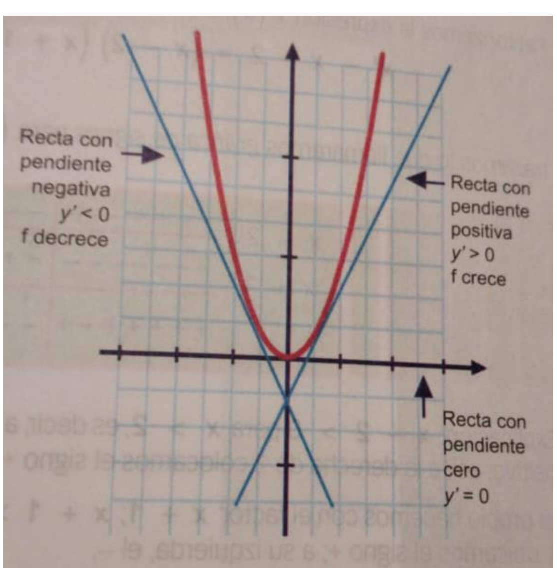
Estudio de las funciones derivables

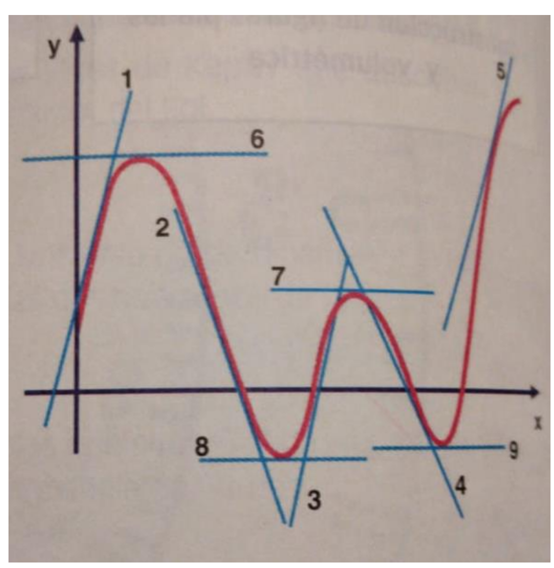
En las Guías anteriores dijimos que la derivada de la función evaluada en un punto, representa geométricamente la **pendiente de la recta tangente** a la curva respectiva en dicho punto.

Trazado de Gráficas.

La derivada de una función $y = f(x)$, es un elemento importante cuando se trata de construir su gráfica.

Conocer dónde la derivada es positiva es establecer en qué intervalos son positivas las pendientes de las rectas tangentes. Asimismo, hallar los intervalos en los cuales la derivada es negativa es determinar dónde las pendientes de dichas rectas son negativas.





Gráficamente, las rectas 1, 3 y 5 tienen pendiente positiva, justamente en los intervalos donde la función crece o sube; por otra parte, las rectas 2 y 4 con pendiente negativa se encuentran en intervalos donde la función baja o decrece. Por último, las rectas 6,7,8 y 9 se ubican en los puntos de inflexión en sus respectivas pendientes con cero.

Como sabemos la derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva. Es suficiente determinar el intervalo donde ésta es negativa para indicar los intervalos de decrecimiento de la función, y el intervalo donde es positiva para establecer los intervalos de crecimiento.

Ejemplo

1) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función y los valores de x para los cuales la función toma valores máximos o mínimos.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$$

Solución

i) Hallamos la derivada $f'(x)$, entonces

$f'(x) = x^2 - x - 2$

ii) Consideramos $f'(x) = 0$, para determinar que valores de x , hacen que el valor de la derivada sea cero.

$f'(x) = 0 \implies x^2 - x - 2 = 0 \quad \textit{factorizo}$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

De donde $x_1 = 2 \ \ y \ \ x_2 = -1$

Los puntos de abscisas $x_1 = 2 \ \ y \ \ x_2 = -1$ corresponden a puntos **críticos** de la curva, sin embargo, aún no sabemos si son máximos o mínimos.

iii) Hacemos una tabla para analizar el signo de la derivada en los **intervalos determinados por los puntos de abscisas 2 y -1**

	$-\infty$	-1	2	∞
X – 2	-	-	+	
X + 1	-	+	+	
Y´ = (x – 2) (x + 1)	+	-	+	

Explicación: $x - 2 > 0$ para $x > 2$, es decir, a partir de 2, el factor $x - 2$ es positivo; así , a la derecha de 2 colocamos el signo + y a la izquierda –
Lo mismo

iv) Por último hacemos el producto de los signos en los intervalos determinados
Si $x \in]-\infty, -1[\ entonces \ f'(x) > 0, de \ modo \ que \ f(x) \ es \ creciente$
Si $x \in]-1, \quad 2[\ entonces \ f'(x) < 0, de \ modo \ que \ f(x) \ es \ decreciente$
Si $x \in]2\,, \infty[\ entonces \ f'(x) > 0, de \ modo \ que \ f(x) \ es \ creciente$

Luego, los puntos $x = -1 \ y \ x = 2$son puntos de transición.
En estos puntos de transición la gráfica de f tiene tangentes horizontales (pendientes cero, $f'(x) = 0$)

Luego, en $x = -1$, la función alcanza un **valor Máximo,** puesto que pasa de un crecimiento a un decrecimiento.

En $x = 2$ alcanza un valor **Mínimo**, puesto que pasa de un decrecimiento a un crecimiento.

v) Para determinar el valor **Máximo** de la función que corresponde a $\boldsymbol{x = -1},$ remplazamos el valor de x en la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) + \frac{1}{3}$$

$$f(-1) = \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{3}$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2} + 2 \quad = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f(2) = \frac{(2)^3}{3} - \frac{(2)^2}{2} - 2(2) + \frac{1}{3}$$

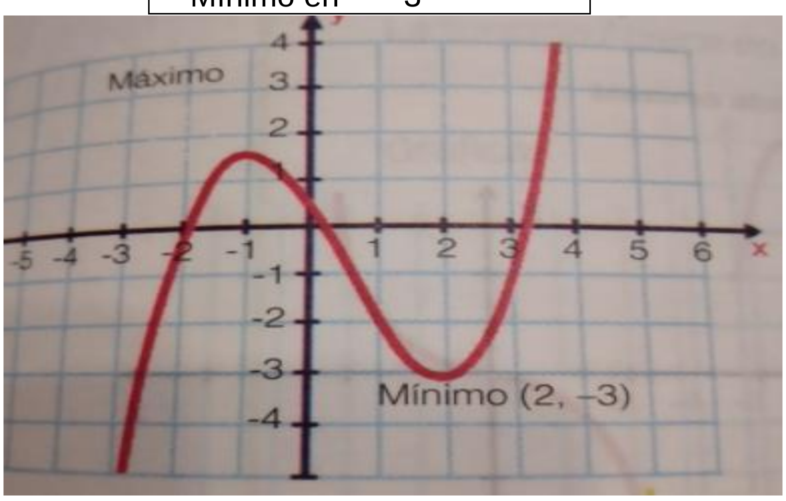
$$f(2) = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 + \frac{1}{3}$$

$$f(2) = \frac{9}{3} - \frac{4}{2} - 4 = 3 - 2 - 4 = -3$$

$f(-1) = \frac{3}{2} \quad y \quad f(2) = -3$, estos valores representan el máximo y el mínimo de la función respectivamente.

Representación gráfica de la información obtenida

Crece	$]2, \infty[$
Máximo en	$\frac{3}{2}$
Decrece	$]-1, 2[$
Mínimo en	-3



2) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función y los valores de x para los cuales la función toma valores máximos o mínimos

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6$$

i) $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$

ii) $f'(x) = 0 \implies 3x^2 - 9x + 6 = 0 \quad divido\ por\ 3$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad factoizo$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

iii) $x = 1 \quad y\ x = 2 \ \ son\ puntos\ críticos$

	$-\infty$ -1 2 ∞
X – 1	- + +
X – 2	- - +
Y´ = (x – 1) (x – 2)	+ - +

iv) De acuerdo con la tabla.
Si $x \in]-\infty, 1[\ entonces\ f'(x) > 0, de\ modo\ que\ f(x)\ es\ creciente$
Si $x \in]1, \quad 2[\ entonces\ f'(x) < 0, de\ modo\ que\ f(x)\ es\ decreciente$
Si $x \in]2\ , \infty[\ entonces\ f'(x) > 0, de\ modo\ que\ f(x)\ es\ creciente$

v) Luego, en x = 1 la función alcanza un valor máximo puesto que pasa de un crecimiento a un decrecimiento.

En x=2 alcanza un valor mínimo, puesto que pasa de un decrecimiento a un crecimiento

vi) Determinamos el valor máximo de la función que corresponde a $x = 1$

$$f(1) = 1^3 - \frac{9}{2} \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = \frac{5}{2}$$

En $x = 1$, la función toma el valor $f(1) = \frac{5}{2}$ que es un **máximo**
De igual forma para $x = 2$, determinamos el valor **mínimo**

$$f(2) = 2^3 - \frac{9}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 2$$

En $x = 2$, la función toma el valor $f(2) = 2$ que es un **mínimo**

Ejercicios

Dadas las siguientes funciones reales, determina sus intervalos de crecimiento, decrecimiento y los valores de x para los cuales la función toma valores máximos o mínimos

i) $y = x^3 - 2x$
ii) $y = x^2 + 3x$
iii) $y = x^3 + x^2 - x$
iv) $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 - 1$
v) $y = 2x^2 - 3x + 4$
vi) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 45x + 8$

Respuestas.

i) Creciente en $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right[, \left]\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right[$; $Decreciente\ en:$ $\left]-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right[$
Valor máximo en $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$; valor mínimo en $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

ii) Creciente en : $\left]-\frac{3}{2}, \infty\right[$; $Decreciente\ en$: $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[$
Tiene un valor mínimo en $x = -\frac{3}{2}$

iii) Creciente en : $\left]\frac{1}{3}, \infty\right[$; $Decreciente\ en$ $\left]-1, \frac{1}{3}\right[$
Valor Máximo en $x = -1$; valor mínimo en $x = \frac{1}{3}$

iv) Creciente en $]-4, 0[$, $]3, +\infty[$; $Decreciente\ en:$ $]-\infty, -4[$, $]o, 3[$
Valor máximo en $x = 0$; valor mínimo en $x = -4$ y $x = 3$

v) Creciente en : $\left]\frac{3}{4}, \infty\right[$; $Decreciente\ en$ $\left]-\infty, \frac{3}{4}\right[$
Valor mínimo en x= $\frac{3}{4}$

vi) Creciente en $]-3, 3[$, $]5, \infty[$; $Decreciente\ en$ $]-\infty, -3[$, $]3, 5[$
Valor máximo en $x = -3$ y $x = 5$; valor mínimo en $x = 3$