



## Leyes de Kepler y Ley de Gravitación Universal.

**Objetivo: Conocer y comprender leyes planetarias de Kepler y la ley de Gravitación Universal.**

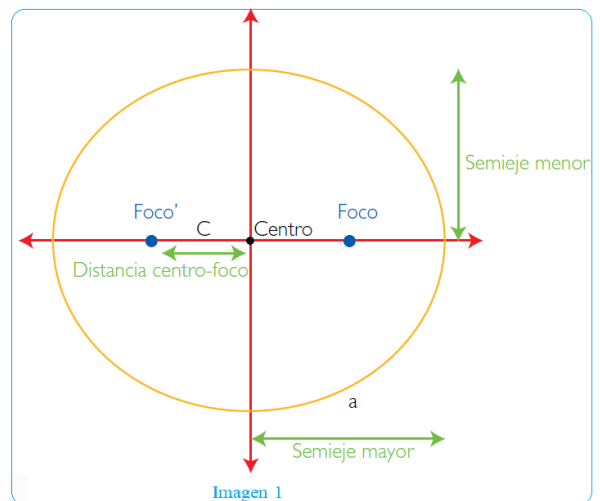
**Nivel: Segundo medio**

A la ley de la gravitación universal de Newton antecedieron tres descubrimientos importantes acerca del movimiento planetario. Fueron de Johannes Kepler, astrónomo alemán, que se iniciaba como joven asistente de Tycho Brahe, danés, entonces de gran fama. Brahe dirigía el primer gran observatorio en el mundo, en Dinamarca, justo antes de la llegada del telescopio. Usando gigantescos instrumentos semejantes a transportadores, llamados *cuadrantes*, Brahe midió las posiciones de los planetas durante 20 años con tanta exactitud que sus resultados aún son válidos en la actualidad. Brahe confió a Kepler sus datos, y después de morir Brahe, Kepler convirtió las mediciones de Brahe a valores que obtendría un observador estacionario fuera del sistema solar. Después de años de esfuerzos la expectativa de Kepler, de que los planetas se moverían describiendo círculos perfectos en torno al Sol, quedó hecha añicos. Encontró que las trayectorias son elipses.

La primera **ley de Kepler** del movimiento planetario es la siguiente:

**La trayectoria de cada planeta alrededor del Sol es una elipse y el Sol se encuentra en uno de sus focos.**

Esta primera ley, plantea que los planetas orbitan en elipses alrededor del Sol. La excentricidad de una elipse es una cantidad adimensional cuyo valor numérico varía entre 0 y 1. Cuando el valor de la excentricidad se aproxima a 0, la elipse se parece a una circunferencia, y cuando se aproxima a 1, se parece a una parábola (imagen 1). El valor de la excentricidad ( $e$ ) se calcula geoméricamente con la ecuación  $e = c/a$ , donde  $c$  corresponde a la distancia desde el centro hasta un foco de la elipse, y  $a$  es el semieje mayor de esta última.





Kepler también encontró que los planetas no giran en torno al Sol con rapidez uniforme, sino que se mueven con mayor rapidez cuando están más

cerca del Sol, y con menor rapidez cuando están más alejados de éste. Lo hacen de modo que una recta o un rayo imaginario, que una al Sol con el planeta, barre áreas iguales de espacio en intervalos iguales de tiempo. El área semi-triangular recorrida durante un mes, cuando un planeta está en órbita alejado del Sol ( $A_2$  de la figura 2) es igual al área semi-triangular que barre el planeta durante un mes, cuando el planeta en órbita está cercano al Sol ( $A_1$  en la figura 2).

Ésta es la segunda ley de Kepler:

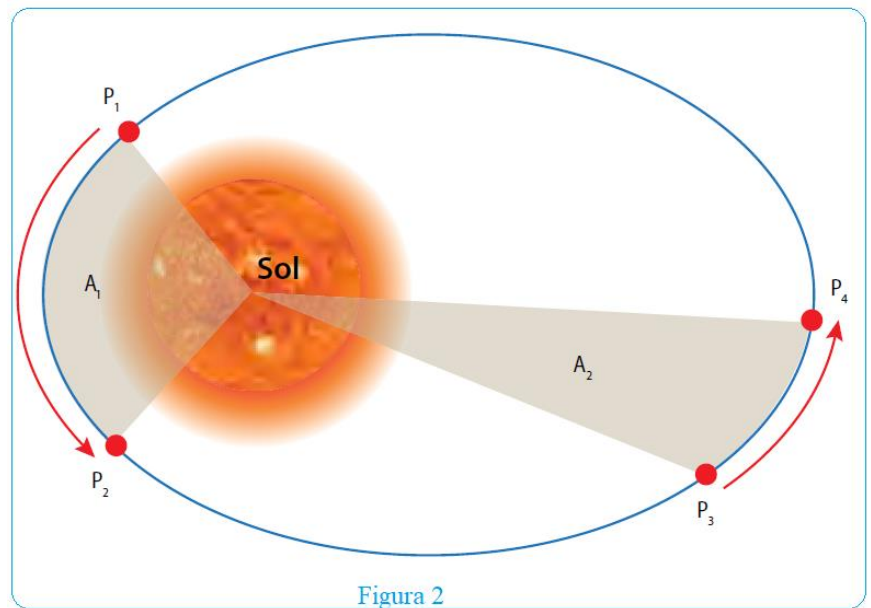


Figura 2

**La línea del Sol a cualquier planeta barre áreas iguales de espacio en intervalos de tiempo iguales.**

Kepler fue quien primero acuñó la palabra **satélite**. No tenía ideas claras acerca de *por qué* los planetas se movían como él descubrió. Carecía de un modelo conceptual. No vio que un satélite no es más que un proyectil bajo la influencia de una fuerza gravitacional dirigida hacia el cuerpo alrededor del cual gira el satélite.

Tú sabes que si lanzas una piedra hacia arriba, desacelera a medida que sube, porque va *contra* la gravedad. Y sabes que cuando regresa va *con* la gravedad, y su rapidez aumenta. Kepler no percibió que un satélite se comporta igual. Al alejarse del Sol, desacelera. Al acercarse al Sol, acelera. Un satélite, sea de un planeta o del Sol, o uno de los actuales que se mueven alrededor de la Tierra, se mueve con más lentitud contra el campo gravitacional y más rápidamente en dirección de tal campo. Kepler no vio esta simplicidad y en cambio fabricó sistemas complicados de figuras geométricas que le dieran sentido a sus descubrimientos. Esos sistemas resultaron insustanciales. Diez años después de investigar mediante el ensayo y el error, buscando una relación entre el tiempo que tarda un planeta en dar una órbita en torno al Sol y la distancia respecto de éste, Kepler descubrió una tercera ley. Con los datos de Brahe, Kepler encontró que el cuadrado de un periodo ( $T$ ) es directamente proporcional al cubo de su radio orbital promedio ( $r$ ).



La segunda ley de Kepler se conoce también como la ley de las áreas, y se formuló definiendo el radio vector como la línea que une el foco (Sol) con un punto de la elipse (posición del planeta). Si  $t_1 = t_2$ , entonces  $A_1 = A_2$ . Esto implica que el planeta se mueve más rápido en el arco de  $A_1$  que en el arco de  $A_2$ .

Es decir, la línea que une a un planeta cualquiera con el Sol (radio vector) barre áreas iguales en tiempos iguales. El planeta emplea el mismo intervalo de tiempo  $t$  en recorrer dos arcos elípticos de longitudes diferentes. Esto significa que el movimiento de un planeta en torno al Sol es variado y que la rapidez con que el planeta se mueve cambia en cada punto de la elipse. La mayor rapidez de un planeta la alcanza al pasar por el perihelio, y la menor rapidez, cuando pasa por el afelio.

A partir de lo anterior, en el caso particular de los dos puntos  $P_1$  y  $P_4$ , que corresponden al perihelio y al afelio, en los cuales se cumple que la velocidad es perpendicular al radio vector, la segunda ley de Kepler se puede expresar también de la siguiente forma:

$$v_1 \cdot r_1 = v_2 \cdot r_2$$

Donde  $v_1$  y  $v_2$  corresponden a la velocidad orbital en el punto  $P_1$  (perihelio) y  $P_4$  (afelio), respectivamente;  $r_1$  y  $r_2$  a la distancia del planeta al Sol en la posición  $P_1$  y  $P_4$ , respectivamente.

La tercera ley es:

**El cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de su distancia promedio al Sol ( $T^2 \sim r^3$  para cualquier planeta).**

Esto significa que el cociente  $T^2/r^3$  es el mismo para todos los planetas. Así, si se conoce el periodo de un planeta, se calcula con facilidad el promedio de su distancia radial orbital (o viceversa) Es interesante destacar que Kepler conocía las ideas de Galileo, acerca de la inercia y del movimiento acelerado, pero no las aplicó a sus propios trabajos. Al igual que Aristóteles, pensaba que la fuerza sobre un cuerpo en movimiento debería tener la misma dirección que la del movimiento del cuerpo. Nunca apreció el concepto de la inercia. Por otro lado, Galileo nunca apreció el trabajo de Kepler, y mantuvo su convicción de que los planetas se mueven en círculos. Para entender más el movimiento planetario se necesitaba alguien que pudiera integrar los resultados de esos dos grandes científicos. El resto es historia conocida, porque esta tarea quedó a cargo de Isaac Newton.



## La ley universal de la gravedad

Según una leyenda popular, Newton estaba sentado bajo un manzano cuando concibió la idea de que la gravedad se propaga más allá de la Tierra. Quizá levantó la vista por entre las ramas del árbol, hasta observar la caída de una manzana y vio la Luna. En cualquier caso, tuvo la perspicacia de apreciar que la fuerza entre la Tierra y una manzana que cae es la misma que tira de la Luna y la obliga a describir una trayectoria orbital en torno a la Tierra; dicha trayectoria es parecida a la de un planeta que gira alrededor del Sol.

Para probar esta hipótesis, Newton comparó la caída de una manzana con la “caída” de la Luna. Se dio cuenta de que la Luna cae en el sentido de que se aleja de la línea recta que hubiera seguido de no haber una fuerza que actuara sobre ella. A causa de su velocidad tangencial, “cae alrededor” de la Tierra redonda. A partir de consideraciones geométricas sencillas, podía comparar la distancia que la Luna cae en un segundo con la distancia que una manzana, o cualquier objeto que estuviera a esa distancia, debería caer en un segundo. Los cálculos de Newton no coincidieron. Algo afligido, pero convencido de que el hecho evidente debe ser más convincente que la hipótesis más bella, guardó sus papeles en un cajón, donde permanecieron durante casi 20 años. Durante ese periodo, fundó y desarrolló el campo de la óptica geométrica, que fue con lo que primero se hizo famoso.

El interés de Newton por la mecánica fue reavivado por la llegada de un espectacular cometa en 1680 y otro dos años después. Retornó al problema de la Luna, a instancias de Edmund Halley, su amigo astrónomo, en honor del cual el segundo cometa recibió su nombre. Newton hizo correcciones de los datos experimentales que usó en su primer método y obtuvo excelentes resultados. Sólo entonces publicó lo que es una de las generalizaciones más trascendentes de la inteligencia humana: la **ley de la gravitación universal**.

Todo atrae a lo demás en una forma bella y simple, donde sólo intervienen masa y distancia. Según Newton, todo cuerpo atrae a todos los demás cuerpos con una fuerza que, para dos cuerpos cualesquiera, es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Lo anterior se expresa como

$$\text{Fuerza} \sim \frac{\text{masa}_1 \times \text{masa}_2}{\text{distancia}^2}$$

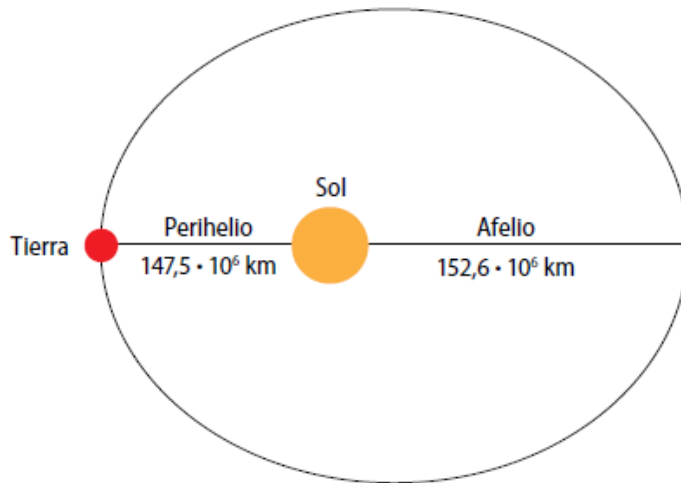
o, en forma simbólica,

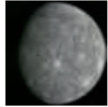



$$F \sim \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los cuerpos y  $d$  es la distancia entre sus centros. Así, cuanto mayores sean las masas  $m_1$  y  $m_2$ , será mayor la fuerza de atracción entre ellas. Cuanto mayor sea la distancia de separación  $d$ , la fuerza de atracción será más débil, en proporción inversa al cuadrado de la distancia entre sus centros de masa.



1. La Tierra describe una órbita elíptica alrededor del Sol. La distancia al Sol en el perihelio es  $147,5 \cdot 10^6$  km y en el afelio  $152,6 \cdot 10^6$  km. Su velocidad en este último punto es 29,1 km/s. ¿Cuál es el valor de la velocidad de traslación de la Tierra en el perihelio?
2. ¿En cuál punto, afelio o perihelio, la velocidad de la Tierra es mayor? **Explica** tu resultado a partir de la segunda ley de Kepler.



Planeta	Período T (años)	Semieje mayor a $\cdot 10^6$ km
 Mercurio	0,24	58,05
 Venus	0,62	108,45
 Tierra	1,00	150
 Marte	1,88	228,6

A partir de la tabla, **responde** las preguntas propuestas:

- a. **Calcula** el cociente entre  $T^2$ ,  $a^3$  para cada uno de los planetas del sistema solar.
- b. **Compara** tus resultados, ¿qué puedes concluir?
- c. **Investiga** estos mismos datos para los planetas faltantes y **contrasta** tu información con los resultados obtenidos para los demás planetas.

1. Aproximadamente 30,1 km/s
2. En el perihelio.

- a. Mercurio:  $2,94 \cdot 10^{-25}$  años<sup>2</sup>/km<sup>2</sup>;  
 Venus:  $3,01 \cdot 10^{-25}$  años<sup>2</sup>/km<sup>2</sup>;  
 Tierra:  $2,96 \cdot 10^{-25}$  años<sup>2</sup>/km<sup>2</sup>;  
 Marte:  $2,96 \cdot 10^{-25}$  años<sup>2</sup>/km<sup>2</sup>
- b. En todos los planetas la constante tiene aproximadamente el mismo valor.