San Fernando College TP
Asignatura: Matemática
Prof. Franco Cabezas Castro

$v_o B_o$ UTP

Guía VII: Geometría analítica en 2D

Segundo Semestre

Nombre:

Curso:

Fecha:

Objetivo: Comprender la relación entre rectas, calcular distancia entre puntos y puntos medios de un segmento.

1. Rectas Paralelas

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales y no tienen puntos en común.

Si $y = m_1 x + n_1$, $y = m_2 x + n_2$ son las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2, respectivamente, entonces:

$$L_1 \parallel L_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$$

1.1. Ejemplo 1

Determine si los puntos $A(-5,-2)$, $B(-2,2)$ y $C(4,10)$ son coliniales (están en la misma recta)

Solución:

- Pendiente de $AB = \dfrac{2-(-2)}{-2-(-5)} = \dfrac{4}{3}$
- Pendiente de $BC = \dfrac{10-2}{4-(-2)} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

Las rectas AB y BC no pueden ser paralelas porque tienen un punto en común: B. por lo tanto son la misma recta, entonces A, B y C son colineales.

1.2. Ejemplo 2

Dados $M(3,1)$, $N(4,4)$, $P(-3,2)$ y $Q(-4,-1)$, pruebe que el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelógramo.

Solución:

Basta verificar que los lados opuestos son paralelos:

- Pendiente de $\overline{MN} = \dfrac{4-1}{4-3} = \dfrac{3}{1} = 3$
- Pendiente de $\overline{PN} = \dfrac{2-4}{-3-4} = \dfrac{-2}{-7} = \dfrac{2}{7}$
- Pendiente de $\overline{QP} = \dfrac{2-(-1)}{-3-(-4)} = \dfrac{3}{1} = 3$
- Pendiente de $\overline{QM} = \dfrac{1-(-1)}{3-(-4)} = \dfrac{2}{7}$

Como $\overline{MN}$ y $\overline{QP}$ tiene igual pendiente, entonces $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$, y como $\overline{PN}$ y $\overline{QM}$ tienen igual pendiente entonces $\overline{PN} \parallel \overline{QM}$.

Entonces, como $MNPQ$ tiene dos pares de lados paralelos, $MNPQ$ es un paralelogramo.

2. Rectas perpendiculares

Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1.

Si $y = m_1 x + n_1$, $y = m_2 + n_2$ son las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2, respectivamente, entonces:

$$L_1 \perp L_2 \leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

2.1. Ejemplo 1

Señale si las rectas siguientes son perpendiculares:

$$L_1 : \ 3x + 5y - 2 = 0 \qquad \text{y} \qquad L_2 : \ 5x - 3y + 8 = 0$$

Solución:

La pendiente para cada recta la encontramos mediante $m = -\dfrac{A}{B}$, entonces $m_1 = -\dfrac{3}{5}$ y $m_2 = -\dfrac{5}{-3} = \dfrac{5}{3}$

Luego: $m_1 \cdot m_2 = -\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{5}{3} = -1$. Por lo tanto, las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares.

2.2. Ejemplo 2

Encuentre la ecuación general de la recta perpendicular a la recta de ecuación $3x - 4y + 8 = 0$ y que pasa por el punto de coordenadas $(4, 1)$

Solución:

Busquemos primero la ecuación principal: $y = mx + n$.

De la ecuación dada podemos determinar la pendiente de dicha recta:

$$3x - 4y + 8 = 0 \rightarrow y = \frac{3}{4}x + 2 \rightarrow \text{la recta dada tiene pendiente } \frac{3}{4}$$

Como las rectas deben ser perpendiculares el producto de sus pendientes debe ser -1.

$$m \cdot \frac{3}{4} = -1 \rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

Entonces la ecuación de la recta pedida es de la forma $y = -\frac{4}{3}x + n$. Para determinar el coeficiente de posición n, usaremos las coordenadas del punto $(4, 1)$, el cual pertenece a la recta, por lo tanto sus coordenadas deben satisfacer la ecuación:

$$1 = -\frac{4}{3} \cdot 4 + n$$

$$\rightarrow 1 + \frac{16}{3} = n$$

$$\rightarrow \frac{19}{3} = n$$

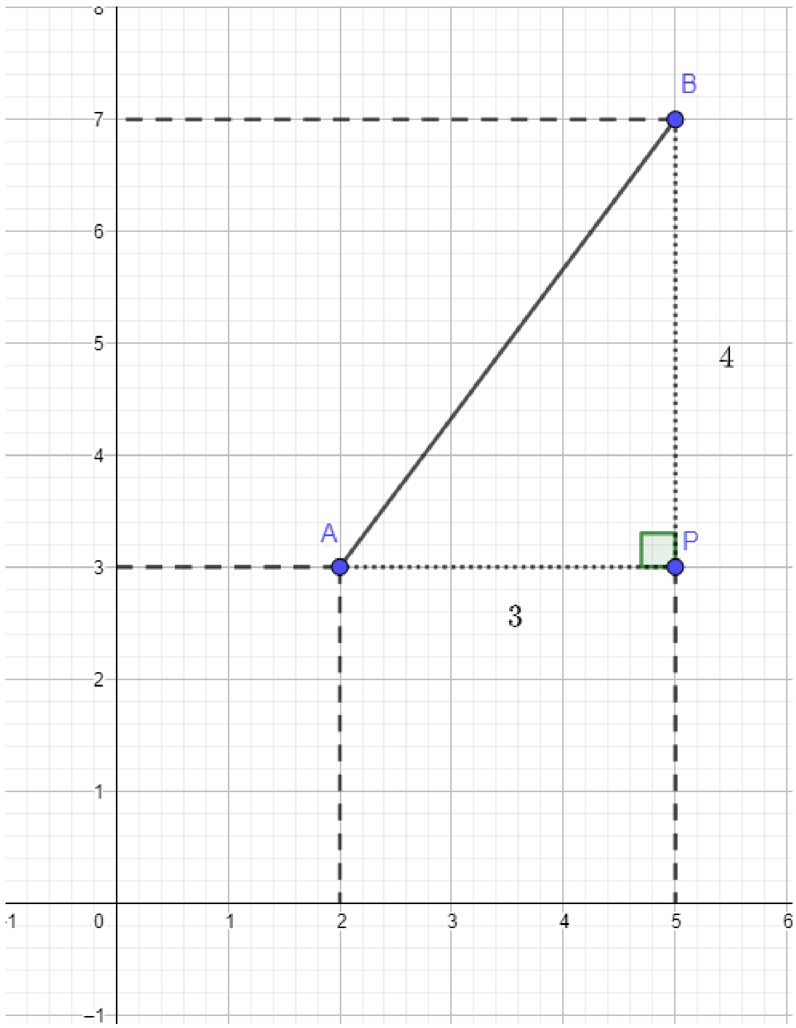
La ecuación pedida es $y = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$. Multiplicándola por 3 y transponiendo tenemos la ecuación general pedida:

$$4x + 3y - 19 = 0$$

3. Distancia entre dos puntos del plano cartesiano

Problema: calcular la distancia entre los puntos $A(2, 3)$ y $B(5, 7)$

Solución: En el gráfico podemos observar que el segmento $\overline{AB}$ corresponde a la hipotenusa del triangulo APB, siendo $(5, 3)$ las coordenadas del punto P . Aplicando Pitágoras tendremos:



$$AB^2 = AP^2 + PB^2$$

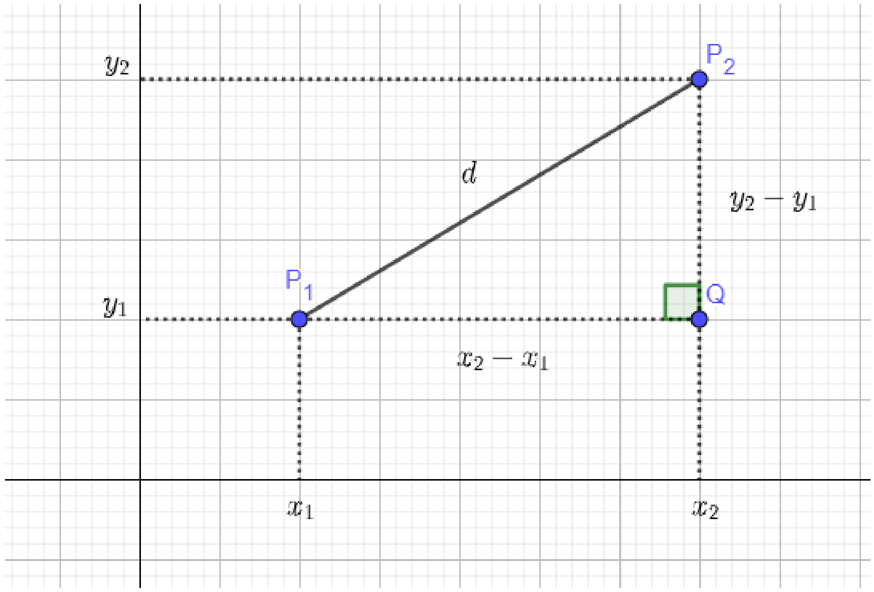
$$AB^2 = 3^2 + 4^2$$

$$AB^2 = 25$$

$$AB = 5$$

Respuesta: La distancia entre los puntos A y B es 5 unidades.

En general, para calcular la distancia entre dos puntos del plano $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, utilizamos, igual que en el problema anterior, el teorema de Pitágoras.



En $\triangle P_1QP_2$, rectángulo en Q:

$$(P_1P_2)^2 = (P_1Q)^2 + (QP_2)^2$$
$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ Fórmula para la distancia entre dos puntos

3.1. Ejemplo

Demuestre que el triángulo con vértices en los puntos $A(2, 8)$, $B(0, 3)$ y $C(7, 6)$ es isósceles.

Solución:

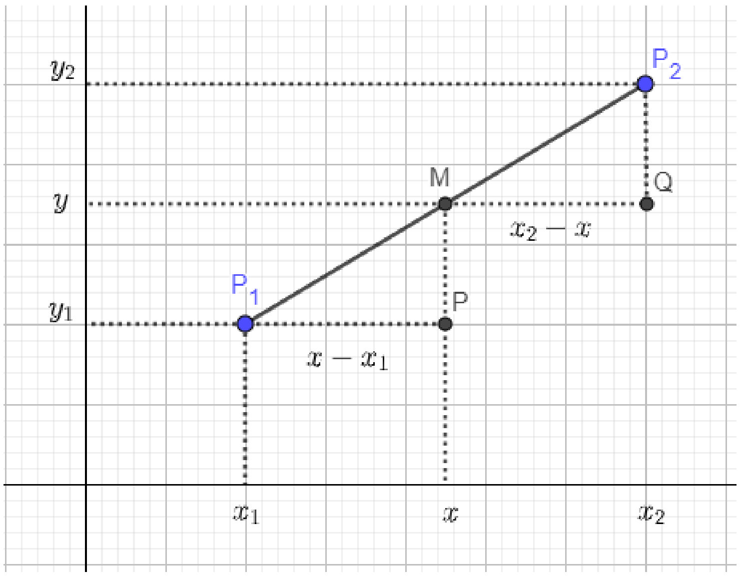
Usaremos la fórmula de la distancia entre dos puntos para mostrar que el triángulo tiene dos lados de igual medida:

- $AB = \sqrt{(0-2)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$
- $BC = \sqrt{(7-0)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$
- $AC = \sqrt{(7-2)^2 + (6-8)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

Como $AB = AC$, el triángulo ABC es isósceles.

4. Coordenadas del punto medio

Determinemos las coordenadas del puntoi medio del trazo de extremos en $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.



Llamemos M al punto buscado y supongamos que sus coordenadas son (x, y). Si observamos la figura podemos darnos cuenta de que los triángulos P_1PM y MQP_2 son congruentes. Entonces, se verifica que

$$x - x_1 = x_2 - x$$

resolviendo la ecuación anterior para la incógnita x

$$2x = x_1 + x_2$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Análogamente:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Entonces :

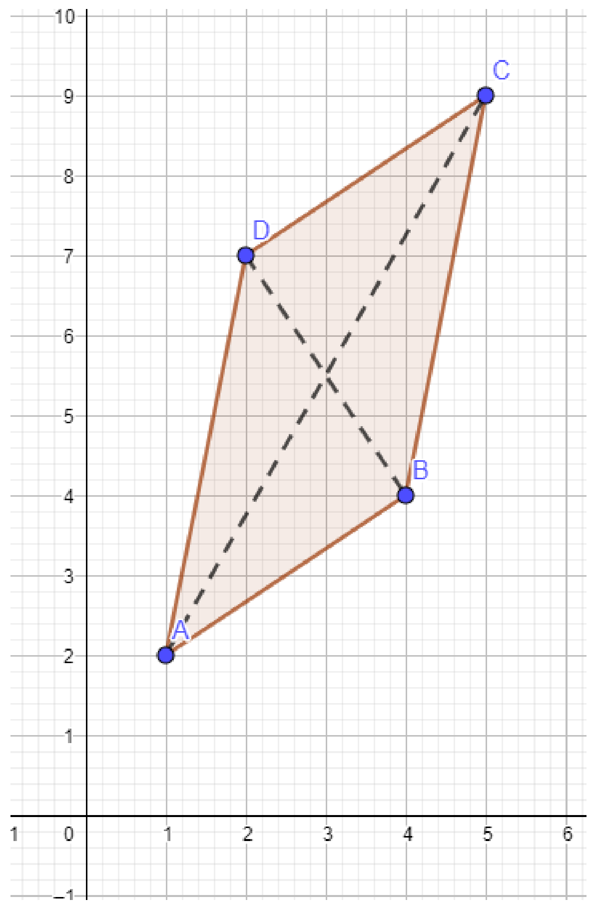
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \qquad \text{Coordenadas del punto medio}$$

4.1. Ejemplo

Demuestre que el cuadrilátero con vértices en los puntos $A(1,2)$; $B(4,4)$, $C(5,9)$ y $D(2,7)$ es un paralelógramo.

Solución:

Una propiedad de los paralelógramos es que sus diagonales se dimidian mutuamente (se intersectan en el punto medio de cada una). Entonces, bastará probar que las dos diagonales tienen el mismo punto medio.



- El punto medio de la diagonal $\overline{AC}$ es $\left(\dfrac{1+5}{2}, \dfrac{2+9}{2}\right) = \left(3, \dfrac{11}{2}\right)$
- El punto medio de la diagonal $\overline{BD}$ es $\left(\dfrac{4+2}{2}, \dfrac{4+7}{2}\right) = \left(3, \dfrac{11}{2}\right)$

Como los puntos medios de ambas diagonales coinciden, entonces $ABCD$ es un paralelógramo.