San Fernando College
Departamento de Matemática.
Profesora: Gloria González Tejos

Tercero Límite, Derivadas e Integrales Guía 25

Titulo : La derivada de una función		
Nombre:	**Fecha** : 5 de Octubre 2020	
Contenidos	**Objetivo de Aprendizaje**	**Habilidades**
Derivadas de funciones comunes	*Calcular derivadas de funciones polinómicas*	Comprender - Aplicar – Calcular

En las Guías pasadas vimos que la velocidad instantánea de una partícula con movimiento rectilíneo que se mueve según la ecuación de movimiento **s(t),** y la pendiente de la recta tangente a la curva **m(x),** se pueden determinar calculando límite. Observamos que ambos límites tienen exactamente la misma forma. A los límites que tienen esta forma se les ha denominado **derivada de la función** f en el punto x_0 . Ahora en esta Guía aprenderás a calcular derivada en forma directa.
Recuerda que puedes consultar al correo ggonzalez@sanfernandocollege.cl

> "Nuestra mayor debilidad reside en rendirnos. La forma más segura de tener éxito es intentarlo una vez más"
>
> Thomas A. Edison

Definición:

Sea $y = f(x)$ una función. Se denomina derivada de la función $y = f(x)$ a la función $y = f´(x)$ definida por

$$f´(x) = \lim_{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, si este límite existe

Observación:

1. $Si\ \ y = f(x),$ la derivada de esta función se denota por $y´$; $f´$; $D_x\ o\ \frac{dy}{dx}$
2. Si la derivada $f´(x)$ existe en x_0, se dice que la función $y = f(x)$ es **diferenciable** en $x_{0\,;}$ ($x_0\ en\ el\ dominio\ de\ f$)
3. La derivada de una función en el punto (x_0, y_0) podemos escribirla también como: $f´(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x \to x_0}$
4. Si una función es diferenciable en todos los puntos de su dominio, decimos que la función es diferenciable.
5. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) es precisamente la **derivada** de la función$y = f(x)\ evaluada\ en\ x_0$.
6. La velocidad instantánea en $t = t_0$, es la **derivada** de la función $s = f(t) evaluada\ en\ t_0$

Nosotros utilizaremos para derivada $\frac{dy}{dx}$

DERIVADAS DE FUNCIONES COMUNES

Calculemos a continuación la derivada de una serie de funciones que nos serán muy útiles para el cálculo de derivadas:

1. Sea $y = f(x) = c$ una función constante
   $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$
   ∴ la derivada de una constante es 0

Es decir $\boxed{\frac{d}{dx}(k) = 0}$

2. Sea $y = f(x) = x$ la función idéntica.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

∴ la derivada de la función idéntica es 1

Es decir $\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$

3. Sea $y = f(x) = x^2$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2+2x\Delta x+\Delta^2 x - x^2}{\Delta x}$$ reduzco términos

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}$$ factorizo y simplifico

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

∴ $\boxed{\frac{d}{dx}(x^2) = 2x}$

4. Sea $y = f(x) = x^3$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2 +(\Delta x)^2 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$= = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$$

∴ $\boxed{\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2}$

5. Sea $y = f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Por teorema del Binomio (tema que no hemos estudiado) se deduce que

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}}$$

6. Si c es una constante y $f(x)$ una función tal que existe $f'(x)$, entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}(f(x))}$$

Es decir, la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

7. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones tales que $f'(x)$ y $g'(x)$ $existen$, entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)}$$

Es decir, la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones.

8. Si $n\in\mathbb{N}$ y $f(x)=x^{-n}$, $entonces$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^{-n})=-nx^{-n-1}}$$

Ejemplos:

i) $\frac{d}{dx}(5x^4))=5\frac{d}{dx}(x^4)=5\cdot 4x^3=20x^3$ derivada de una constante por una función.

ii) $\frac{d}{dx}(x^3+x^2)=\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(x^2)=3x^2+2x$ derivada de la suma de funciones

iii) $\frac{d}{dx}(x^5-2x^4+3x^3-8)=\frac{d}{dx}(x^5)-\frac{d}{dx}(2x^4)+\frac{d}{dx}(3x^3)-\frac{d}{dx}(8)$

$$=5x^4-2\cdot 4x^3+3\cdot 3x^2-0$$
$$=\quad 5x^4-8x^3+9x^2$$

iv) Encuentre la derivada de $f(x)=3x^5+2x^2-3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$ lo primero es dejar la función con coeficientes enteros.

$f(x)=3x^5+2x^2-3+x^{-1}-2x^{-2}$ Ahora se aplica derivada. Como los dos últimos términos tienen exponentes negativos, se debe aplicar la propiedad (8)

$$\frac{d}{dx}(3x^5+2x^2-3+x^{-1}-2x^{-2})=\frac{d}{dx}(3x^5)+\frac{d}{dx}(2x^2)-\frac{d}{dx}(3)+\frac{d}{dx}(x^{-1})-\frac{d}{dx}(2x^{-2})$$

$$=3\cdot 5x^4+2\cdot 2x-0-1x^{-2}-2(-2)x^{-3}$$

$$=15x^4+4x-x^{-2}+4x^{-3}$$

v) Encuentre la derivada de la función $f(t)=\frac{1}{2}t^4-\frac{2}{3}t^3$

$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}t^4-\frac{2}{3}t^3)=\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}t^4)-\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}t^3\right)=\frac{1}{2}\cdot 4t^3-\frac{2}{3}\cdot 3t^2$ simplifico

$$=2t^3-2t^2$$

Ejercicios: Determina la derivada de cada una de las siguientes funciones:

i) $y = 3x^4 + 2x^2 - 5x + 2$
ii) $y = x^2 + 2x - 1$

iii) $y = 3x$

iv) $y = -5x^2 + 2x - 5$

v) $y = x^3 + x^2 + x + 1$

vi) $y = -7x^6 - 12x^2 + 13x - 2$

vii) $y = 3x^5 + 2x^2 + x - 1$

viii) $y = 5x - 2$

ix) $y = 8x^6 - 2x^5 + 5x^2 - x + 2$

x) $y = x^{10} - x^8$

xi) $y = 3x^{15} - 12x^2 + 5$

xii) $y = \frac{1}{x}$

xiii) $y = x^{-1} + 2x^{-2} - x^{-3}$

xiv) $y = x^4 + 2x - 5x^{-1} + x^{-5}$

xv) $y = x^2 + x - 1 + x^{-3}$

xvi) $y = 5x^2 - x^{-1} + 2x^{-2}$

xvii) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 1$

xviii) $y = \frac{4}{3x^2}$

xix) $y = \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^5}$

xx) $y = \sqrt{5}(s^3 - s^2)$

xxi) $y = (x + 1)^2$

Respuestas

$i)$ $12x^3 + 4x$ - 5	viii) $5x$	xv) $2x + 1 - 3x^{-4}$
ii) $2x + 2$	$ix)$ $48x^5 - 2x^4 + 10x - 1$	xvi)$10x + x^{-2} - 4x^{-3}$
iii) 3	x) $10x^9 - 8x^7$	xvii)$x^4 - 2x^2 + \frac{3}{2}x$
iv) -10$x + 2$	xi) $45x^{14} - 24x$	. xviii) $-\frac{8}{3}x^{-3}$
v) $3x^2 + x + 1$	xii)$-x^{-2}$	$xix)$ $- 10x^{-3} - 6x^{-4} + 5x^{-6}$
vi)$-42x^5 - 24x + 13$	xiii) $-x^{-2} - 4x^{-3} + 3x^{-4}$	xx) $3\sqrt{5}s^2 - 2\sqrt{5}s$
vii) $15x^4 + 4x + 1$	.xiv)$4x^3 + 2 + 5x^{-3} - 5x^{-6}$	$xxi)$ $2x + 2$