San Fernando College TP
Asignatura: Matemática
Prof. Franco Cabezas Castro

v_oB_o UTP

Guía V: Transformaciones Isométricas

Segundo Semestre

Nombre:

Curso:

Fecha:

Objetivo: Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D.

1. Transformaciones isométricas

Cuando el famoso filósofo y teólogo Santo Tomás de Aquino hablaba de la apreciación estética, decía: "Los sentidos se deleitan con las cosas que tienen las proporciones correctas".

La simetría, como la belleza, es muy difícil de definir. Los diccionarios hablan acerca de çorrespondencia, equivalencia o identidad entre las partes que constituyen un sistema.^{a}l definir la simetría; y de resultado de una ordenación equilibrada y armoniosa", en el caso de la belleza.

En un sentido limitado, la simetría se refiere a una correspondencia del tipo ïmagen especular.^{en}tre las partes de un objeto. En este sentido, en la naturaleza los cristales son un buen ejemplo de simetría, por su apariencia y estructura atómica. En un sentido más amplio la simetría incluye las nociones de equilibrio, semejanza y repetición. Para los griegos, el círculo en el plano y la esfera en el espacio representaron la perfección pues eran las más simétricas de las figuras.

Si consideramos dos conjuntos de puntos en el plano, a los cuales llamaremos origen e imagen, la correspondecia que transforma a los puntos del conjunto origen en los puntos del conjunto imagen recibe el nombre de **transformación geométrica**. Las transformaciones geométricas que tienen la propiedad de mantener las distancias (tamaño y forma) se denominan **transformaciones isométricas**.

En matemática distinguimos una gran variedad de tipos de equilibrio usando la noción geométrica de **movimiento rígido**, o **isometría** (que significa "del mismo tamaño"). una isometría es un tipo específico de transformación, mediante la cual tomamos una figura geométrica, la movemos, quizás la giramos y posiblemente la damos vuelta, pero no cambiamos ni su forma ni su tamaño.

Es decir, dada una transformación T que a cada punto P del plano le hace corresponder el punto

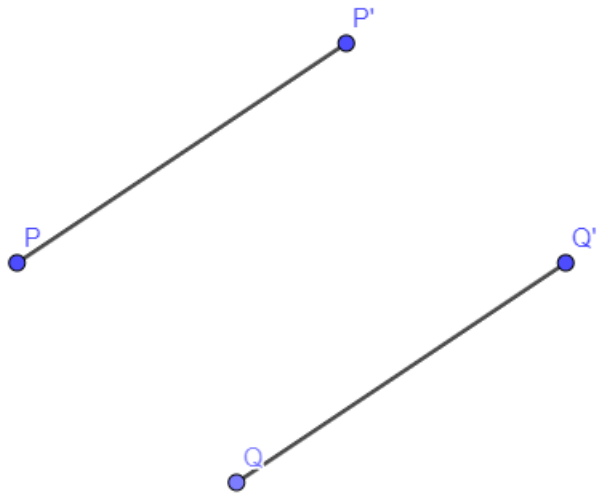
$P' = T(P)$, decimos que T es una isometría si y solo si, dados dos puntos cualquiera A y B del plano, se cumple que:

$$d(A, B) = d[T(A), T(B)]$$

Una isometría puede ser: **Traslación** en una dirección particular, **Rotación** con respecto a un punto, **Reflexión o Simetría** respecto a una recta o **Simetría deslizante** con respecto a una recta.

1.1. Traslación

Una traslación es un movimiento en una dirección fija. Sean P y Q dos puntos cualquiera del plano, y sean P' y Q' sus respectivas imágenes por medio de un movimiento T; se dice que T es una *traslación* si para todo par de puntos P y Q, se cumple que los segmentos $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$:



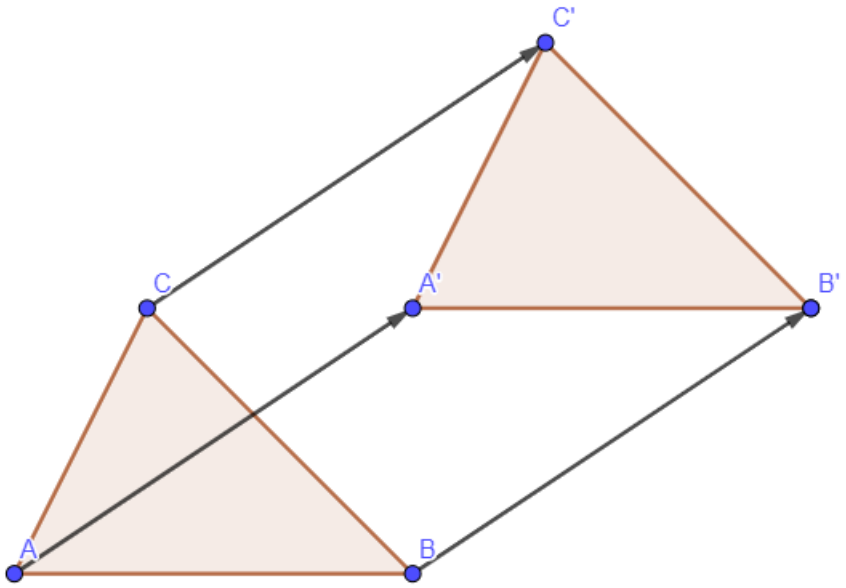
I) tienen la misma longitud

II) tienen direcciones paralelas

III) tienen el mismo sentido

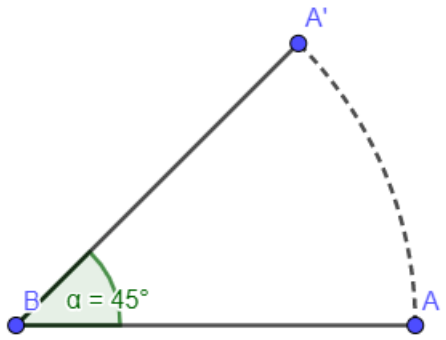
El conjunto de todos los segmentos del plano que son congruentes con el segmento $\overline{PP'}$, de origen en un punto cualquiera P y de extremo en el punto $P' = T(P)$, de imagen P bajo el movimiento T, que tengan dirección paralela a la de $\overline{PP'}$ y su mismo sentido, recibe el nombre de vector y se representa por $\vec{PP'}$. Gráficamente este conjunto se puede representar por cualquiera de sus elementos dotado de una punta de flecha en su extremo, que indica el sentido en que se considera el segmento. De esta manera podemos hablar de la traslación T de vector $\vec{PP'}$.

Las figuras se desplazan paralelamente a ellas mismas a una distancia igual a la longitud del vector traslación, en dirección paralela a la del vector traslación, y en el mismo sentido de este.



1.2. Rotación

Una rotación es un giro en torno a un cierto punto O -llamado el centro de rotación- en una cierta magnitud α -el ángulo de rotación-. La imagen de un punto P se encuentra en el extremo de un arco de circunferencia de amplitud α y radio OA.



La imagen del centro de rotación O es el mismo punto O. Decimos que O es un **punto fijo** para este movimiento.

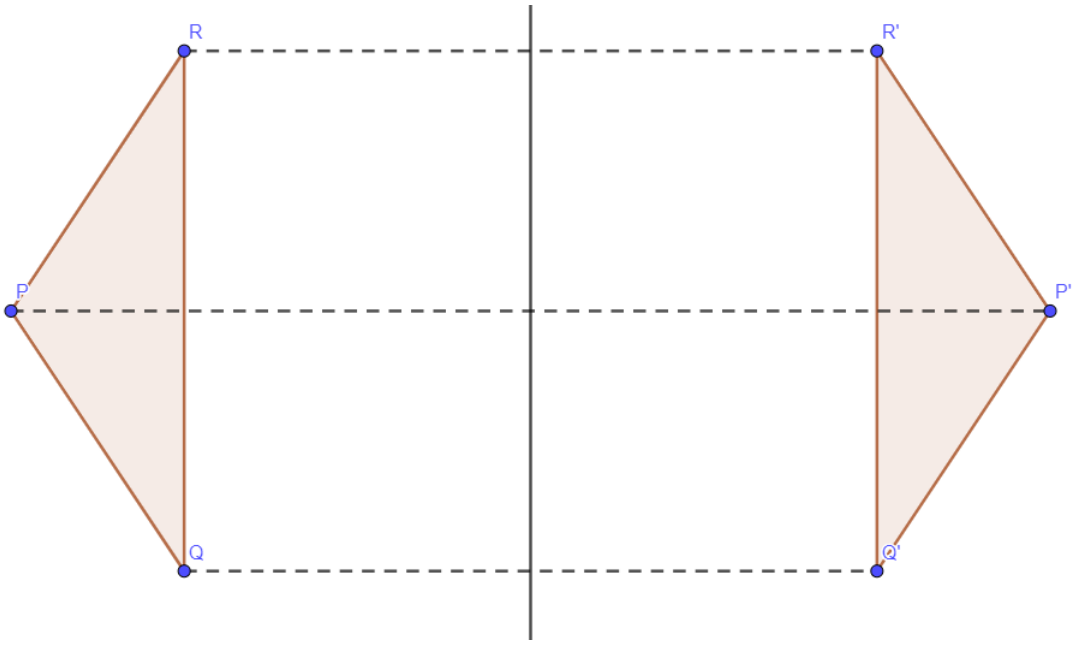
A la figura siguiente, una cara circular, le aplicamos una rotación en torno al centro de la circunferencia, en un ángulo de magnitud 90°

Si a la misma figura aplicamos la misma rotación una segunda vez, la imagen correspode a una rotación en torno al mismo punto y con un ángulo de rotación igual a 180°. Si la aplicamos tres veces obtenemos la imagen producto de una rotación en 270°. Esta última imagen tiene el mismo efecto que una rotación en −90°, y que es la inversa de la rotación original (en 90°).

1.3. Reflexión

Se denomina reflexión a la transformación geométrica que hace corresponder a cada punto A del plano otro punto A', tales que la recta que los une es perpendicular a una recta fija L de manera que el segmento $\overline{AA'}$ queda dividido por ella en dos partes iguales. La recta L se llama **eje de reflexión o de simetría**.

La reflexión es también un movimiento involutivo, es decir, si P' es la imagen de P, entonces P es la imagen de P'. Los puntos del eje son todos los puntos fijos, es decir, imágenes de sí mismos, bajo una reflexión.

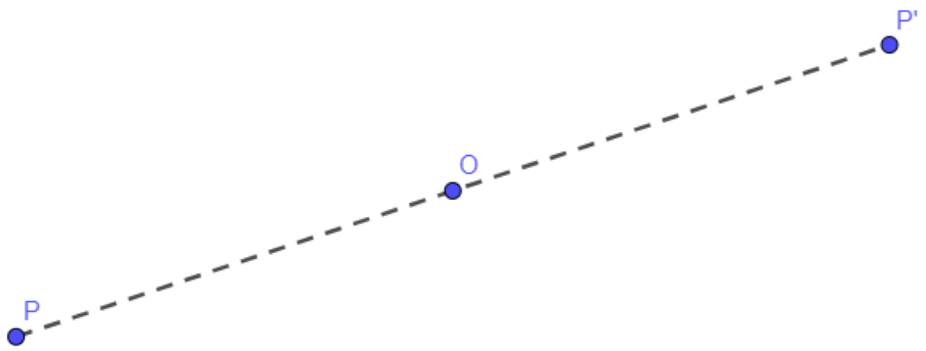


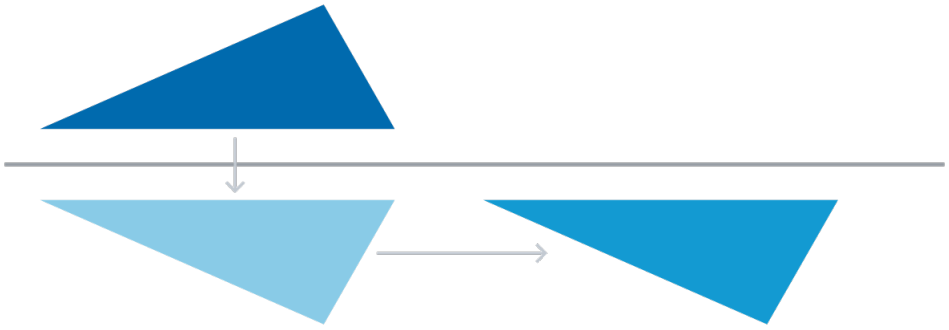
1.4. Simetría Central

Llamamos así a la simetría respecto a un punto, denominado centro de simetría. En una simetría central de centro O, el punto imagen P' de un punto P es tal que:

- P' está en la recta OP que une el punto P con el centro de simetría.
- La longitud del segmento $\overline{OP}$ es igual a la de $\overline{OP'}$.

Una simetría central es también un movimiento involutivo. La imagen del centro de simetría es el mismo punto.



1.5. Simetría deslizante

Existe una cuarto movimiento rígido en el plano que es una combinación de una simetría y una traslación que se conoce como **desplazamiento**. En este tipo de movimiento, que podríamos asociar a las huellas que dejan nuestros pies al caminar, la figura se traslada en una cierta dirección, sentido y magnitud, y luego se refleja en una recta paralela a la dirección de la traslación.