Tercero Límite , Derivadas e Integrales Guía 21

Nombre		
Curso	**Fecha 31 de Agosto**	
Contenidos	**Objetivo de Aprendizaje**	**Habilidades**
Introducción a la derivación	Comprender el concepto de derivada	Comprender - Aplicar – Calcular

Nota: Esta guía trata contenidos nuevos, cualquier consulta por favor realizarla al correo ggonzalez@sanfernandocollege.cl

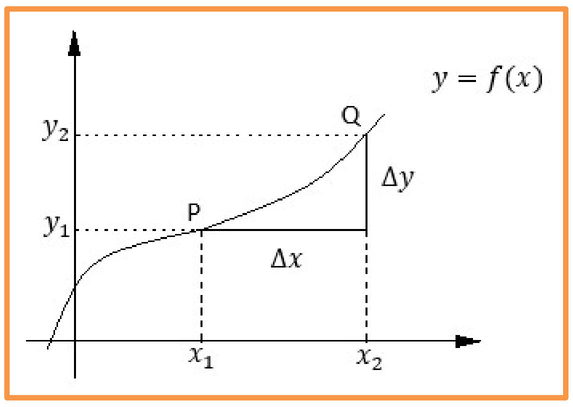
Introducción a la Derivación

En esta guía comenzaremos a estudiar un concepto de mucha aplicación en Matemática. Para lograr comprenderlo mejor analizaremos primero un problema que debe ser más familiar; la velocidad de una partícula en un instante dado.

Antes es necesario que tengas claro el concepto de función y, en ella, a qué se llama variables dependientes e independientes. Es necesario también cómo se grafica una función y qué significa incrementar una variable.

Recordemos brevemente que una función es una relación donde cada elemento del domino tiene una imagen única en el co-dominio. Es usual que una función se defina a través de una fórmula, tales como:
$y = f(x)$ donde (x, y) podrían representar los puntos de una determinada curva en el plano
$s = f(t)$ donde s (unidades de longitud) podría representar el camino recorrido por un móvil en un intervalo de tiempo t (unidades de tiempo).

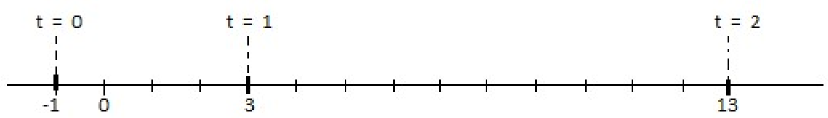
Si nos referimos a $y = f(x)$ en un gráfico, puede ocurrir que x varía (se incremente) en una cierta cantidad que llamaremos Δx y ese incremento de x produce un incremento en y, denotado Δy.
Si la curva de la figura está representada por la función $y = f(x)$ y P y Q son puntos de la curva, entonces:



$x_2 - x_1 = \Delta x$ se llama incremento de x
$y_2 - y_1 = \Delta y$ se llama incremento de y
Ambos incrementos se producen cuando el punto P se compara con el punto Q sobre la curva.
Si nos referimos a $s = f(t)$ podemos pensar que esta ecuación representa distancia recorrida (s) en un lapsus de tiempo (t). Así, el tiempo se incrementa en un Δt, entonces, si el móvil está en movimiento, su distancia con respecto a un punto de referencia se incrementará un Δs que obviamente dependerá del Δt y de la función que defina el movimiento.

Velocidad instantánea

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una recta horizontal.



Sea $s = f(t)$ la función que determina la distancia a que dicha partícula se encuentra de 0 en el instante t.
Esta distancia será positiva si la partícula se encuentra a la derecha de 0 y será negativa si se encuentra a la izquierda de 0. La ecuación $s = f(t)$ es la ecuación de movimiento de la partícula.
Por ejemplo, sea $s = 3t^2 + t - 1$ la ecuación de movimiento de una partícula.
Si $t = 0$ (segundos) entonces $s = 3 \cdot 0^2 + 0 - 1 = -1$m.

Esto significa que cuando empezamos a contar el tiempo ($t = 0$) la partícula está ubicada a 1m a la izquierda del origen 0.
Si $t = 1$ entonces $s = 3 \cdot 1^2 + 1 - 1 = 3$
Si $t = 2$ entonces $s = 3 \cdot 2^2 + 2 - 1 = 13$

Así en un $\Delta t = 1$ segundo (desde $t = 0$ a $t = 1$), hay una variación en la distancia recorrida $\Delta s = 3 - (-1) = 4m$. Esta información nos permite calcular la velocidad media que lleva el móvil al desplazarse $4m$ en 1 segundo:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4m}{1s} = 4\,{}^{m}/_{s}$$

Obviamente, esta velocidad media no es constante y no nos entrega información acerca del movimiento de la partícula en un instante determinado.
Si consideramos que s es la posición en el instante t, tenemos que $\Delta s = s - s_0$ y $\Delta t = t - t_0$ donde s es la posición de la partícula en el instante t y s_0 es la posición de la partícula en el instante t_0.
Así la velocidad media sería: $V_m = \Delta v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

$$V_m = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

Mientras más pequeño sea el intervalo $\Delta t = t - t_0$ más instantánea será la velocidad media que calculemos, así definimos como velocidad instantánea en el instante t_0.

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

ahora, sabiendo que $s = f(t)$ y $s_0 = f(t_0)$,

tenemos
$$\boxed{v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \;(*)}$$

Este límite, si existe, es la expresión que nos indica la velocidad que lleva la partícula en el instante t_0.
Observaciones:
1. Sabemos que $\Delta s = s - s_0$ y $\Delta t = t - t_0$ de donde, si $t \to t_0$, podemos decir que $\Delta t \to 0$ y $s = s_0 + \Delta s$ y $t = t_0 + \Delta t$, luego en (*) podemos escribir:

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \;(**)}$$

donde t_0 es el instante en el cual queremos calcular la velocidad instantánea.
2. Las fórmulas (*) y (**) son equivalentes.

3. La velocidad de un móvil puede resultar positiva, negativa o cero. Si es positiva significa que la partícula se está moviendo en un sentido sobre la recta y si es negativa significa que se mueve en sentido opuesto. Si es cero significa que la partícula está en reposo.

4. El valor absoluto de la velocidad se denomina rapidez e indica solamente cuán rápido se mueve la partícula sin darnos información acerca del sentido del movimiento.

Veamos el siguiente ejemplo:
Una partícula se mueve a lo largo de una recta. Su ecuación de movimiento es:

$$s(t) = t^2 - 2t + 2$$

Determina los instantes en que la partícula está en reposo y los intervalos de tiempo en que se mueve en un sentido o en el opuesto.

Solución:
Si calculamos la velocidad usando la fórmula (*) obtenemos:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{t^2 - 2t + 2 - ({t_0}^2 - 2t_0 + 2)}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{t^2 - 2t + 2 - {t_0}^2 + 2t_0 - 2}{t - t_0}$$

Agrupando y reduciendo términos semejantes, tenemos:

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{t^2 - {t_0}^2 - 2t + 2t_0}{t - t_0}$$

Factorizamos:

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{(t + t_0)(t - t_0) - 2(t - t_0)}{(t - t_0)} = \lim_{t \to t_0} t + t_0 - 2 = t_0 + t_0 - 2$$

Todo esto con $t - t_0 \neq 0$ para poder simplificar:

Así:

$$v(t_0) = 2t_0 - 2$$

$$v(t_0) = 2(t_0 - 1)$$

Observamos que la velocidad instantánea es:
Cero si $t_0 = 1;\ v(1) = 2(1 - 1) = 2(0) = 0$. Mayor que cero si $t_0 > 1$. Menor que cero si $t_0 < 1$.
Esto significa que iniciamos la medición del tiempo en $t = 0$, la partícula se moverá en un sentido durante 1 segundo (hasta $t = 1$), luego, en $t = 1$ esta se detiene. A partir de este instante la partícula inicia su movimiento en el sentido opuesto.

Para comprender mejor este ejemplo puedes ingresar al siguiente link:
https://youtu.be/lSgDxz_Hq8Q

Ejercicios

1. En cada uno de los ejercicios siguientes determina la fórmula de la velocidad instantánea si se conoce la ecuación de movimiento.

$a)\ s(t) = 4t^2 - 2t + 1$

$b)\ s(t) = t^3 - 2t^2 - 3$

$c)\ s(t) = 2t^3 + 5t^2 - 4t + 2$

$d)\ s(t) = 3t^2 + 2t + 4$

$e)\ s(t) = 3t^2 - 5$

$f)\ s(t) = t^3 - 27t$

2. En cada uno de los casos del ejercicio 1 determina si la velocidad se anula en algún momento. Indica en qué instante. Considera solo tiempos positivos.

3. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta. Su ecuación de movimiento es dada. Determina los instantes en que la partícula está en reposo y los intervalos de tiempo en que se mueve en un sentido o en el opuesto.

$a)\ s(t) = t^2 - 6t + 5$

$b)\ s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$

$c)\ s(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2$

$d)\ s(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$

$e)\ s(t) = \frac{1}{4}t^2 - 4t + 5$

$f)\ s(t) = 24t + 10t^2$

Soluciones

1. $a)\ 8t_0 - 2$
   $b)\ 3{t_0}^2 - 4t_0$
   $c)\ 6{t_0}^2 + 10t_0 - 4$
   $d)\ 6t_0 + 2$
   $e)\ 6t_0$
   $f)\ 3{t_0}^2 - 27$

2. $a)\ t_0 = 1/4$
   $b)\ t_0 = 0$ y $t_0 = 4/3$
   $c)\ t_0 = 1/3$
   $d)$ No se anula
   $e)\ t_0 = 0$
   $f)\ t_0 = 3$

3. $a)$ Si $t = 3$, la partícula está en reposo.
Si $0 < t < 3$, la partícula se mueve hacia la izquierda.
Si $t > 3$, la partícula se mueve hacia la derecha.

$b)$ Si $t = 1$ y $t = 5$ la partícula está en reposo.
Si $t < 1$, la partícula se mueve hacia la derecha.
Si 1$< t < 5$, la partícula se mueve hacia la izquierda.
Si $t > 5$, la partícula se mueve hacia la derecha.

$c)$ Si $t = 0$ y $t = 3$ la partícula está en reposo.
Si $0 < t < 3$, la partícula se mueve hacia la izquierda.
Si $t > 3$, la partícula se mueve hacia la derecha.

$d)$ Si $t = 2$, la partícula está en reposo.
Si $0 < t < 2$, la partícula se mueve hacia la izquierda.
Si $t > 2$, la partícula se mueve hacia la derecha.

$e)$ Si $t = 8$, la partícula está en reposo.
Si $0 < t < 8$, la partícula se mueve hacia la izquierda.
Si $t > 8$, la partícula se mueve hacia la derecha.

$f)$ La velocidad es siempre positiva.

¡Que tengan una muy buena semana!