Guía N° 22
Propiedades de las raíces de la ecuación Cuadrática

Nombre		
Curso	**Fecha**	
2° Medio A-B-C	Semana Lunes 7 – Viernes 11 de Septiembre	
Contenidos	**Objetivo de Aprendizaje**	**Habilidades**
Ecuación y Función Cuadrática	Mostrar que comprenden la función Cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$	Comprender - Aplicar – Calcular - Graficar

Nota: Esta guía contiene material y contenidos nuevos, cualquier consulta por favor realizarla a tu profesor de asignatura:
Si eres estudiante del 2° Medio A o C, al profesor Mauricio Osorio: mosorio@sanfernandocollege.cl,
Si eres estudiante del 2° Medio B, a la profesora Gloria González: ggonzalez@sanfernandocollege.cl

"La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo"

Nelson Mandela

En esta guía estudiaremos dos propiedades de las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado. Aprenderemos también a construir una ecuación conociendo sus soluciones y también, a través del método del discriminante mencionado en guías anteriores, estudiaremos su naturaleza.

Propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática.

1. Suma de las raíces.
Recordemos primero que si tenemos una ecuación de segundo grado completa de la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Entonces sus soluciones, en función de sus coeficientes, son:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad , \quad \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Por lo tanto, al sumarlas obtenemos siempre, lo siguiente:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} \ - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$$

Por lo tanto, podemos afirmar que siempre, la suma de las soluciones de una ecuación cuadrática equivale a $\frac{-b}{a}$, donde "b" es el coeficiente del término lineal y "a" es el coeficiente del término cuadrático.

Veamos un ejemplo que corrobora esta propiedad.

Tenemos la siguiente ecuación: $x^2 + 4x - 12 = 0$
Podemos resolverla factorizando de la siguiente forma: $(x + 6) \cdot (x - 2) = 0$
Obteniendo así las soluciones: $x_1 = -6$ y $x_2 = 2$

Si sumamos las soluciones tenemos que: $x_1 + x_2 = -6 + 2 = -4$
Por otra parte, los coeficientes de la ecuación son: $a = 1, b = 4, c = -12$
Entonces: $\frac{-b}{a} = \frac{-4}{1} = -4$, cumpliendo así la propiedad.

2. Producto de las raíces.
Considerando una ecuación cuadrática completa de la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Entonces sus soluciones, en función de sus coeficientes, son:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad , \quad \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Por lo tanto, al multiplicarlas obtenemos siempre, lo siguiente:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \cdot \left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a \cdot 2a}$$

Nota: en el numerador tenemos la factorización de una diferencia de cuadrados, por lo tanto, lo escribiremos como el primer término al cuadrado menos el segundo término al cuadrado.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Por lo tanto, podemos afirmar que siempre, el producto entre las soluciones de una ecuación cuadrática equivale a $\frac{c}{a}$, donde “c” es el valor del término libre y “a” es el coeficiente del término cuadrático.
Veamos un ejemplo que corrobora esta propiedad.

Tenemos la siguiente ecuación: $x^2 - 6x + 8 = 0$
Podemos resolverla factorizando de la siguiente forma: $(x-4) \cdot (x-2) = 0$
Obteniendo así las soluciones: $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$

Si multiplicamos las soluciones tenemos que: $x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot 2 = 8$
Por otra parte, los coeficientes de la ecuación son: $a = 1, b = -6, c = 8$
Entonces: $\frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$, cumpliendo así la propiedad.

Construcción de ecuación de segundo grado a partir de sus soluciones.

Con las dos propiedades estudiadas podemos construir una ecuación de segundo grado que tenga soluciones dadas.

Ejemplo

Construir una ecuación de segundo grado que tenga como soluciones $x_1 = -5$ y $x_2 = 3$
Sabemos de la primera propiedad que: $x_1 + x_2 = -5 + 3 = -2 = \frac{-b}{a}$

De la segunda propiedad sabemos que: $x_1 \cdot x_2 = -5 \cdot 3 = -15 = \frac{c}{a}$

Tenemos las siguiente relaciones:
$\frac{-b}{a} = \frac{-2}{1}$ y $\frac{c}{a} = \frac{-15}{1}$ Entonces podemos afirmar que $a = 1,\ b = 2,\ c = -15$.
Por lo tanto, la ecuación sería $x^2 + 2x - 15 = 0$ que podemos resolver factorizando de la siguiente forma: $(x+5) \cdot (x-3) = 0$. Obteniendo así las soluciones $x_1 = -5$ y $x_2 = 3$.
Para un par de ejemplos puedes ver un video entrando al siguiente link:
https://youtu.be/ZuU3r7ZERLA

Naturaleza de las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado.

A través del método del discriminante estudiado en guías anteriores, podemos decir cómo serán las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado. Recordemos que el discriminante corresponde simbolizado por un triángulo, en función de los coeficientes de la ecuación viene dado por la siguiente expresión:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$$

Si el discriminante es **igual a $\mathbf{0}$**, entonces la ecuación tendrá **dos soluciones iguales** pertenecientes al conjunto de los **Números Reales**.
Si el discriminante es **mayor que $\mathbf{0}$**, entonces la ecuación tendrá **dos soluciones distintas** pertenecientes al conjunto de los **Números Reales**.
Si el discriminante es **menor que $\mathbf{0}$**, entonces la ecuación tendrá **dos soluciones distintas** pertenecientes al conjunto de los **Números Complejos**.

Veamos algunos ejemplos.

1. Analicemos la siguiente ecuación: $x^2 + 6x + 9 = 0$
Sus coeficientes son: $a = 1,\ b = 6,\ c = 9$. Por lo tanto, al calcular su discriminante obtenemos:
$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, $\Delta = (6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$, $\Delta = 36 - 36 = 0$ Entonces la ecuación tiene dos soluciones iguales pertenecientes al conjunto de los números reales. Resolvamos la ecuación: $x^2 + 6x + 9 = 0$:
Se puede factorizar de la siguiente forma: $(x+3) \cdot (x+3) = 0$, obtenemos $x_1 = x_2 = -3$.
En efecto la ecuación tiene dos soluciones iguales pertenecientes al conjunto de los números reales.
2. Analicemos la siguiente ecuación: $x^2 + 5x + 4 = 0$

Sus coeficientes son: $a = 1,\ b = 5,\ c = 4$. Por lo tanto, al calcular su discriminante obtenemos: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, $\Delta = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$, $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$ Entonces la ecuación tiene dos soluciones distintas pertenecientes al conjunto de los números reales.
Resolvamos la ecuación: $x^2 + 5x + 4 = 0$:
Se puede factorizar de la siguiente forma: $(x+4) \cdot (x+1) = 0$, obtenemos $x_1 = -4, x_2 = -1$.
En efecto la ecuación tiene dos soluciones distintas pertenecientes al conjunto de los números reales.

3. Analicemos la siguiente ecuación: $x^2 + 2x + 2 = 0$
Sus coeficientes son: $a = 1,\ b = 2,\ c = 2$. Por lo tanto, al calcular su discriminante obtenemos: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, $\Delta = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$, $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ Entonces la ecuación tiene dos soluciones distintas pertenecientes al conjunto de los números complejos.
Resolvamos la ecuación: $x^2 + 2x + 2 = 0$
A través de la fórmula general tenemos que:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \boxed{\sqrt{-8}}}{2}$$

Pero el término encerrado, $\sqrt{-8}$, no pertenece a los números reales, pertenece al conjunto de los números complejos. Afirmamos entonces que la ecuación tiene dos soluciones distintas pertenecientes al conjunto de los números complejos.

Puedes ver un video con un ejemplo adicional de cada caso entrando al siguiente link:
https://youtu.be/dZSkcWv-Gko

Resuelve los siguientes ejercicios

1. ¿Cuál es el valor de k en la ecuación $x(x-k) = 7(k-x)$ si la suma de sus soluciones es 4?

2. ¿Cuál es el valor de k en la ecuación $(2k-1)x^2 + (k+2)x = 7x + 1$ si la suma de sus raíces es 1?

3. ¿Cuál es el valor de k en la ecuación $kx^2 + 5x + 2k = x^2$ si el producto de sus raíces es $\frac{5}{4}$?

4. Determina el valor que debe tomar k en la ecuación $8x^2 - x + (k-7) = 0$ para que:
a) No tenga soluciones reales
b) Tenga dos soluciones reales e iguales
c) Tenga dos soluciones reales y distintas

5. Determine el valor que debe tomar k en la ecuación $x^2 - 10x + k = 0$ para que:
a) No tenga soluciones reales
b) Tenga dos soluciones reales e iguales
c) Tenga dos soluciones reales y distintas

6. Construye una ecuación de segundo grado que tenga como soluciones:
a) $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$ b) $x_1 = 8$ y $x_2 = -1$ c) $x_1 = 5$ y $x_2 = 10$

7. Calcula el discriminante de las siguientes ecuaciones y determina la naturaleza de sus soluciones, es decir cuántas soluciones tiene cada una en los números reales o eventualmente en los complejos.

a) $x^2 - 10x + 20 = 0$	g) $x^2 - 5x - 14 = 0$
b) $4x^2 - 8x + 29 = 3$	h) $-x^2 - 11x - 30 = 0$
c) $x^2 - 4x + 4 = 0$	i) $3x^2 + x + 2 = 0$
d) $x^2 - 6x + 12 = 0$	j) $-2x^2 + 12x - 29 = 0$
e) $5x^2 + 125 = 0$	k) $3x^2 - 10x + 8 = 0$
f) $3x^2 - 7x = 0$	l) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

Soluciones

1. El valor de $k = 11$

2. El valor de $k = 2$

3. El valor de $k = \frac{-5}{3}$

4. a) El valor de $k > \frac{225}{32}$ b) El valor de $k = \frac{225}{32}$ c) El valor de $k < \frac{225}{32}$

5. a) El valor de $k > 25$ b) El valor de $k = 25$ c) El valor de $k < 25$

6. a) $x^2 + x - 6 = 0$ b) $x^2 - 7x - 8 = 0$ c) $x^2 - 15x + 50 = 0$

7. a) Discriminante mayor que cero, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
   b) Discriminante menor que cero, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones complejas distintas.
   c) Discriminante igual a cero, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales.
   d) Discriminante menor que cero, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones complejas distintas.
   e) Discriminante menor que cero, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones complejas distintas.
   f) Discriminante mayor que cero, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
   g) Discriminante mayor que cero, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
   h) Discriminante mayor que cero, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
   i) Discriminante menor que cero, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones complejas distintas.
   j) Discriminante menor que cero, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones complejas distintas.
   k) Discriminante mayor que cero, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
   l) Discriminante igual a cero, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales.

¡Que tengan una muy buena semana!