San Fernando College
Asignatura: Matemática
Profesores: Gloria González Tejos - Mauricio Osorio Arenas

Guía Semana N° 18
Derivación

Nombre		
Curso	**Fecha**	
4° Medio A-B-C	Semana Lunes 10 – Viernes 14 de Agosto	
Contenidos	**Objetivo de Aprendizaje**	**Habilidades**
Introducción a la derivación	Comprender el concepto de derivada	Comprender - Aplicar – Calcular

Nota: Esta guía trata contenidos nuevos, cualquier consulta por favor realizarla a tu profesor de asignatura:
Si eres estudiante del 4° Medio Biólogo, a la profesora Gloria González:
ggonzalez@sanfernandocollege.cl
Si eres estudiante del 4° Medio Matemático, al profesor Mauricio Osorio:
mosorio@sanfernandocollege.cl

"La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo"

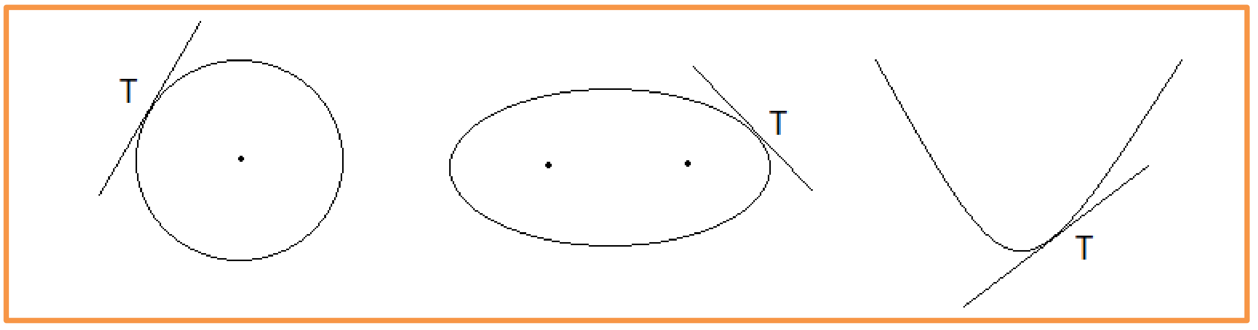
Nelson Mandela

Introducción a la Derivación

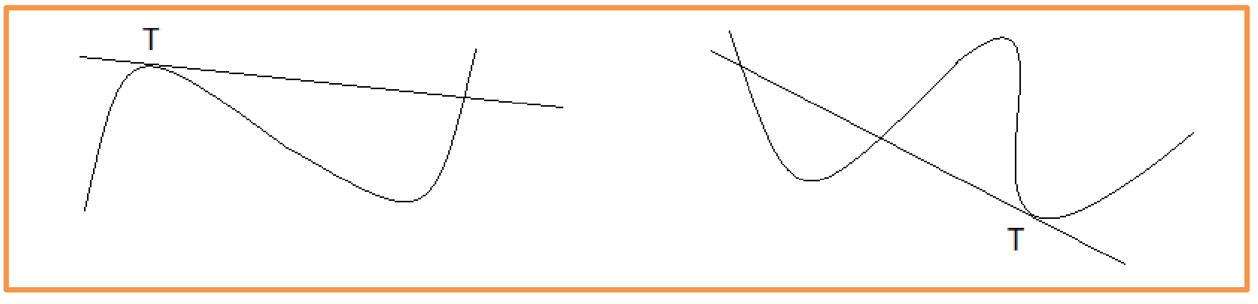
En la guía anterior comenzamos a estudiar el concepto de derivada. Analizamos primero el problema de la velocidad de una particular en un instante dado. En esta guía vamos a analizar la tangente a una curva.

Tangente a una curva

Si pensamos en una curva cerrada como una circunferencia o una elipse, o incluso en una curva como una parábola podemos decir que una tangente a la curva es una recta que tiene un solo punto común con la curva. Designamos por T el punto de tangencia.



Si pensamos ahora en una curva cualquiera, la definición que conocemos para tangente ya no es adecuada porque si la recta es tangente en un punto puede intersectar a la curva en otros.



Daremos entonces una definición más amplia para la tangente a una curva en un punto dado de ella.

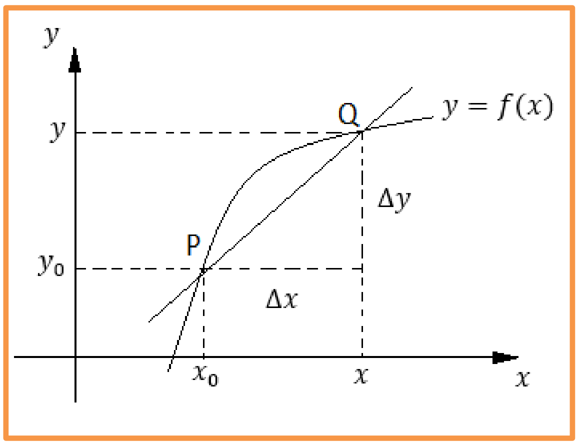
Recordemos que, para conocer una recta, basta con conocer un punto de ella y su pendiente. Si queremos una recta tangente a una curva en un punto dado, dicho punto pertenecerá tanto a la curva como a la recta. Así solo nos queda determinar la pendiente de la recta tangente.

Sea $y = f(x)$ la ecuación que representa una curva cualquiera en el plano cartesiano.
La recta PQ es una secante a la curva $y = f(x)$.

$\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$

Representa los incrementos de las variables al comparar las coordenadas de los puntos P y Q de la curva.



Dichos incrementos pueden ser positivos o negativos según la posición que tengan los puntos sobre la curva. (Posición relativa de ellos en forma horizontal, izquierda-derecha y en forma vertical, arriba-abajo).

Recordemos que la pendiente de la recta PQ es:

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Como $x = x_0 + \Delta x$, podemos escribir la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

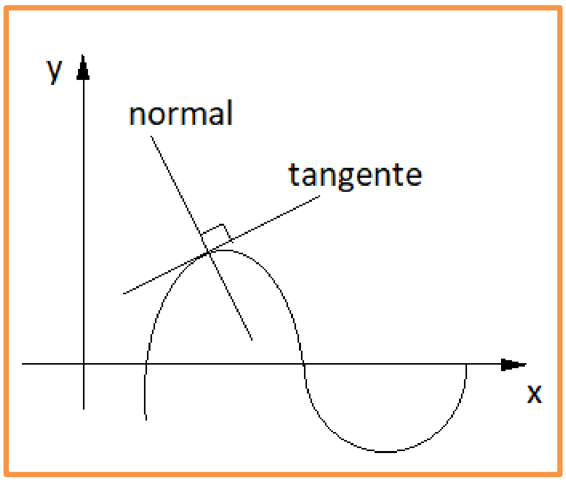
Así, considerando el punto P y la pendiente m_{PQ} podemos conocer la ecuación de la recta PQ. Pero PQ no es tangente a la curva. Consideramos ahora P como un punto fijo sobre la curva y hagamos que Q se acerque sobre la curva a P. En el caso en que Q se acerque tanto como queremos a P, ocurrirá que $x \to x_0$ e $y \to y_0$. De este modo cuando $Q \to P$, podemos decir que la recta PQ tiende a ser tangente a la curva en el punto P. Esto nos permite decir que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, y_0)$ es:

$$m(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{o,} \quad m(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si este límite existe.

Observaciones:

1. El punto $P(x_0, y_0)$ es punto de la curva entonces satisface su ecuación y así, $y_0 = f(x_0)$.
2. La función $y = f(x)$ debe ser continua en el punto P para que esta definición tenga sentido.
3. Se llama recta normal a una curva en un punto dado, a la recta perpendicular a la tangente a la curva en dicho punto.



Veamos los siguientes ejemplos:

1. Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 3$, en el punto $P\ (1, -2)$.
Solución:
Tenemos un punto de la recta $P\ (1, -2)$.
Debemos determinar su pendiente de acuerdo con la definición dada.

$$m(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$m(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - 3 - (x_0{}^2 - 3)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - 3 - x_0{}^2 + 3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0{}^2}{x - x_0}$$

$\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0}$ con $x - x_0 \neq 0$, simplificando tenemos,

$$\lim_{x \to x_0} x + x_0 = x_0 + x_0 = 2x_0 \quad \therefore m(x_0) = 2x_0$$

En este caso $x_0 = 1$ luego, la pendiente de la tangente es $m = 2 \cdot 1 = 2$. Ahora debemos hallar la ecuación de la recta que pasa por $P\ (1, -2)$ y tiene pendiente 2.
La ecuación tiene la forma $y = 2x + k$, como $P\ (1, -2)$ pertenece a la recta debe satisfacer su ecuación, así:
$-2 = 2 \cdot 1 + k$
$-2 = 2 + k$
$-4 = k$
Luego, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 3$, en el punto $P\ (1, -2)$, es $y = 2x - 4$.
Puedes ver la resolución paso a paso de un ejercicio como este ingresando al siguiente link:
https://youtu.be/U6MwFr7rOUs

2. Determina la ecuación de la recta normal a la curva $y = x^2 - 7x + 6$, en el punto $P\ (2, -4)$.
Solución:
Si encontramos la pendiente de la tangente a la curva en P, podemos hallar la pendiente de la normal a la curva en P. Recuerda que dos rectas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es -1. $\quad m_T \cdot m_N = -1 \leftrightarrow m_N = -\frac{1}{m_T}$

La pendiente de la recta tangente en P la calculamos de acuerdo con la fórmula:

$$m_T(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$m_T(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - 7x + 6 - (x_0{}^2 - 7x_0 + 6)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - 7x - x_0{}^2 + 7x_0}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0{}^2 - 7x + 7x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) - 7(x - x_0)}{x - x_0}$$

con $x - x_0 \neq 0$, simplificando tenemos, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} x + x_0 - 7 = x_0 + x_0 - 7 = 2x_0 - 7$

$$\therefore m_T(x_0) = 2x_0 - 7$$

Como $x_0 = 2$ tenemos que la pendiente de la tangente a la curva en el punto $P\ (2,-4)$ es: $m_T = 2 \cdot 2 - 7 = 4 - 7 = -3$ Entonces podemos decir que la pendiente de la recta normal a la curva en el punto $P\ (2,-4)$ es $m_N = \frac{1}{3}$ (ya que $m_T \cdot m_N = -1$).

Así, la ecuación buscada es de la forma $y = \frac{1}{3}x + k$ como $P\ (2,-4)$ pertenece a la recta debe satisfacer su ecuación, así:

$-4 = \frac{1}{3} \cdot 2 + k$

$k = -4 - \frac{2}{3}$

$k = -\frac{14}{3}$

Luego, la ecuación de la recta normal a la curva $y = x^2 - 7x + 6$, en el punto $P\ (2,-4)$, es $y = \frac{1}{3}x - \frac{14}{3}$.

Puedes ver la resolución paso a paso de un ejercicio como este ingresando al siguiente link: https://youtu.be/0DgfzLYqNP8

Ejercicios

1. Determina la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas dadas, en el punto dado.

$a)\ y = 16 - x^2 \quad ; P(4,0)$

$b)\ y = x^2 + 2 \quad ; P(1,2)$

$c)\ y = x^2 + x - 1 \quad ; P(-1,-2)$

$d)\ y = x^2 - 7x + 10 \quad ; P(3,-2)$

$e)\ y = 2x^2 + 5x - 3 \quad ; P(-1,-6)$

$f)\ y = -x^2 + 6x - 5 \quad ; P(3,4)$

2. Determina la ecuación de la recta normal a cada una de las curvas dadas, en el punto dado.

$a)\ y = -x^2 + 4x + 5 \quad ; P(1,8)$

$b)\ y = x^2 + 2 \quad ; P(1,3)$

$c)\ y = x^2 + 2x - 1 \quad ; P(-2,-1)$

$d)\ y = 6x^2 + 5x \quad ; P(-1,1)$

$e)\ y = -x^2 \quad ; P(-2,-4)$

$f)\ y = x^2 - 6x + 5 \quad ; P(2,-4)$

3. Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a cada una de las curvas dadas, en el punto dado.

$a)\ y = x^3 - x \quad ; P(1,0)$

$b)\ y = x^3 - 2x^2 + 1 \quad ; P(-1,-2)$

$c)\ y = 2x - x^3 \quad ; P(-2,4)$

Soluciones

1. $a)\ y = -8x + 32$ $\quad b)\ y = x + 1$ $\quad c)\ y = -2x - 4$ $\quad d)\ y = -x + 1$ $\quad e)\ y = x - 5$ $\quad f)\ y = 4$

2. $a)\ 2y = -x + 17$ $\quad b)\ 2y = -x + 7$ $\quad c)\ 2y = x$ $\quad d)\ 7y = x + 8$ $\quad e)\ 4y = -x - 18$ $\quad f)\ 2y = -x - 6$

3. $a)\ T:\ y = 2x - 2$; $N:\ 2y = -x + 1$

$b)\ T:\ y = 7x + 5$; $N:\ 7y = -x - 15$

$c)\ T:\ y = -10x - 16$; $N:\ 10y = x + 42$

¡Que tengan una muy buena semana!