Guía N°18 Cuarto Plan Común

Titulo : Sistema de ecuaciones lineales		
Nombre:	**Fecha** : 10 de Agosto	
Contenidos	**Objetivo de Aprendizaje**	**Habilidades**
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas	*Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas*	*Analizar - Aplicar - Resolver*

En esta Guía recordarás la forma de determinar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales sin resolverlo, además los diferentes métodos que te permiten resolverlos. Recuerda tus dudas ggonzalez@sanfernandocollege.cl o al whatsapp del curso. Repasa la materia, analiza los ejemplos y desarrolla los ejercicios del capítulo 5 de tu texto de preparación.

Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas:

Forma general de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}$$

Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, es determinar el conjunto de pares ordenados (x , y) de números reales que satisfacen a ambas ecuaciones . Este conjunto se denomina conjunto solución del sistema.
Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener una solución, infinitas soluciones o ninguna solución, dependiendo de la posición relativa de las rectas en el plano cartesiano.

Análisis de sistemas de Ecuaciones

En el sistema: $\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}$

se puede determinar el tipo de solución que tiene el sistema, sin resolverlo, solo analizando los coeficientes.

- Tiene solución *única* si: $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ Rectas secantes (Sistema compatible)
- Tiene *infinitas* soluciones si: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ Rectas coincidentes (Sistema compatible)
- Tiene solución *vacía* si: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ Rectas paralelas (Sistema incompatible)

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Un sistema de ecuaciones puede ser resuelto a través de los siguientes métodos:

I. Método de Sustitución:

Consiste en despejar una de las incógnitas de una ecuación y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, con el fin de determinar primero el valor de la otra incógnita

Ejemplo

Consideremos este sistema: (1) $2x - y = 4$

(2) $3x + y = 11$

$y = 11 - 3x$ (3)

Sustituiremos esta expresión en la ecuación (1)

$2x - (\ 11 - 3x) = 4$

$2x - 11 + 3x = 4$

$5x = 15\ /\cdot\frac{1}{5}$

$\boxed{x = 3}$

Ahora reemplazamos el valor de $x = 3$ en la ecuación (3)

$y = 11 - 3\cdot 3 \rightarrow \boxed{y = 2}$ Por lo tanto, el conjunto solución es $\boxed{S = (\ 3\ ,\ 2\ )}$

II. **<u>Método de Igualación:</u>**

Consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones y luego **igualar** las expresiones resultantes, con el fin de determinar primero el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Dado el sistema (1) $3x - 2y = 4$

(2) $x + 3y = 5$

Despejamos la incógnita $\boldsymbol{x}$ de ambas ecuaciones, obteniendo:

de (1) $x = \frac{4+2y}{3}$

de (2) $x = 5 - 3y$

Luego igualamos ambas expresiones.

$\frac{4+2y}{3} = 5 - 3y \quad /\cdot 3$

$4 + 2y = 15 - 9y\ /+9y$

$4 + 2y + 9y = 15 - 9y + 9y$

$4 + 11y = 15\ / -4$

$4 - 4 + 11y = 15 - 4$

$11y = 11\ /\cdot\frac{1}{11}$

$\boxed{y = 1}$ Ahora reemplazamos el valor de $y = 1$ en la ecuación (2) $x = 5 - 3\cdot 1$

$\boxed{x = 2}$

Por lo tanto, el conjunto solución del sistema es $\boxed{S = (2, 1)}$

III. **Método de Reducción:**

Consiste en **reducir** las dos ecuaciones a una sola, sumándolas.

En algunos casos debemos amplificar convenientemente una o ambas ecuaciones, de modo que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos.

Ejemplo.

Consideremos el siguiente sistema:

(1) $3x - 11y = 5$

(2) $2x + 4y = 1$

Multiplicando la ecuación (1) por 4 y la ecuación (2) por 11, hacemos opuestos los coeficientes de la incógnita $\boldsymbol{y}$ obteniendo:

$$\begin{array}{lll} 3x - 11y = 5 & / \cdot 4 & \rightarrow \quad 12x - 44y = 20 \\ 2x + 4y = 1 & / \cdot 11 & \rightarrow + \quad 22x + 44y = 11 \\ \hline & & \quad 34x + 0y = 31 \end{array}$$

$$\boxed{x = \frac{31}{34}}$$

Ahora, reemplazamos este valor $x = \frac{31}{34}$, en la ecuación (2).

$2 \cdot \frac{31}{34} + 4y = 1 \; / \cdot 34$

$62 + 136y = 34$ / -62

$136y = -28$

$y = -\frac{28}{136}$ / simplifico por 4

$\boxed{y = -\frac{7}{34}}$

Por lo tanto, el conjunto solución del sistema es $\boxed{S = \left(\frac{31}{34}, -\frac{7}{34}\right)}$

IV. **Método de Determinantes. Regla de Cramer**

Un sistema de la forma $\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}$

También se puede resolver por medio de **determinantes.** A este sistema se le asignan tres determinantes:

- **Determinante principal** Δp, formado por los coeficientes de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$

Tomados en ese mismo orden:

$\Delta p = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\Delta p = ad - bc}$

- **<u>Determinante de la variable x</u>** Δx, que se obtiene reemplazando la columna respectiva por las constantes del sistema, en ese mismo orden

$$\Delta x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\Delta x = ed - bf}$$

- **<u>Determinante de la variable y</u>** Δy, que se obtiene reemplazando la columna respectiva por las constantes del sistema, en ese mismo orden

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\Delta y = af - ec}$$

Por lo tanto: $\boxed{x = \frac{\Delta x}{\Delta p}}$; $\boxed{y = \frac{\Delta y}{\Delta p}}$

Ejemplo: Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

$\Delta p = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; $\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; $\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3 \cdot 4 - (-2 \cdot 1)$ $\qquad$ $= 6 \cdot 4 - (-2 \cdot 2)$ $\qquad$ $= 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1$

$= 12 + 2$ $\qquad$ $= 24 + 4$ $\qquad$ $= 6 - 6$

$\boxed{\Delta p = 14}$ $\qquad$ $\boxed{\Delta x = 28}$ $\qquad$ $\boxed{\Delta y = 0}$

Por lo tanto $x = \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{28}{14} = 2$; $\boxed{x = 2}$ $\qquad$ $y = \frac{\Delta y}{\Delta p} = \frac{0}{14} = 0$; $\boxed{y = 0}$

El conjunto solución del sistema es $\boxed{S = (2, 0)}$

<u>Problema de aplicación:</u>

Dos ángulos son complementarios y la medida de uno de ellos tiene 6° más que la mitad del otro. ¿Cuál es la medida de cada ángulo?

Sea x la medida de un ángulo. Sea y la medida del otro ángulo.

Como los ángulos son complementarios: (1) $\quad x + y = 90°$

Dado que uno de ellos tiene 6° más que el otro: (2) $\quad x = 6 + y$

Así obtenemos el sistema : $\begin{aligned} x + y &= 90° \\ x &= 6 + y \end{aligned}$

Sustituimos (2) en (1) : $6 + y + y = 90° \rightarrow \quad y = 42°$; $x = 48°$

Por lo tanto, las medidas de los ángulos son 48° y 42°.