Guía N° 17
Función Cuadrática

Nombre		
Curso	**Fecha**	
2° Medio A-B-C	Semana Lunes 3 – Viernes 7 de Agosto	
Contenidos	**Objetivo de Aprendizaje**	**Habilidades**
Función Cuadrática	Mostrar que comprenden la función Cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$	Comprender - Aplicar – Calcular - Graficar

Nota: Esta guía contiene material y contenidos nuevos, cualquier consulta por favor realizarla a tu profesor de asignatura:
Si eres estudiante del 2° Medio A o C, al profesor Mauricio Osorio:
mosorio@sanfernandocollege.cl,
Si eres estudiante del 2° Medio B, a la profesora Gloria González:
ggonzalez@sanfernandocollege.cl

"La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo"

Nelson Mandela

Función Cuadrática

En álgebra, una función cuadrática, o un polinomio cuadrático, es una función polinómica con una o más variables en la que el término de grado más alto es de segundo grado. Vamos a estudiar las funciones cuadráticas de una variable, que tienen la siguiente forma:

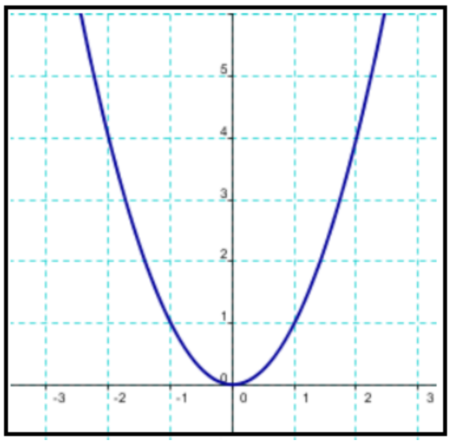
$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0}$$

En este caso la única variable es x, mientras que los valores de a, b y c, son constantes que determinan ciertos parámetros de la función que estudiaremos más adelante. Si la función cuadrática se establece igual a cero, entonces el resultado es una ecuación cuadrática. Las soluciones a la ecuación de una variable se denominan raíces de la función.

Gráfica de la función Cuadrática

La gráfica de una función cuadrática de una sola variable es una parábola tal como se muestra en la siguiente imagen. En particular podemos ver la gráfica de la función:

$$\boxed{f(x) = x^2}$$



Para cada valor de x el valor de $y = f(x)$ es su cuadrado, tenemos así los puntos $(0,0)$, $(-1,1)$, $(1,1)$, $(-2,4)$, $(2,4)$, que se aprecian en la imagen. Para obtener los puntos se puede construir una tabla como la que se muestra a continuación:

x	$y = f(x)$	Punto en el plano
0	$0^2 = 0$	$(0,0)$
-1	$(-1)^2 = 1$	$(-1,1)$
1	$1^2 = 1$	$(1,1)$
-2	$(-2)^2 = 4$	$(-2,4)$
2	$2^2 = 4$	$(2,4)$

Si bien construir una tabla de valores para la función ayuda bastante para conocer ciertos puntos, lo más recomendable es conocer ciertos elementos de la parábola que corresponde la gráfica de la función cuadrática, es por esto por lo que los estudiaremos a continuación:

Concavidad: El valor de a determina una de las características más significativas de la parábola, su orientación o concavidad, si $a > 0$ hablamos de una parábola con concavidad positiva o apertura "hacia arriba" mientras que si $a < 0$ hablamos de una parábola con concavidad negativa o apertura "hacia abajo". Además, del coeficiente a depende el grado de curvatura del gráfico; una magnitud mayor de a le da al gráfico una apariencia más cerrada (fuertemente curvada), mientras que una menor magnitud de a le da al gráfico una apariencia menos cerrada (débilmente curvada).

Vértice: El vértice de la parábola es su punto de inflexión. En una función matemática, un punto de inflexión es un punto donde los valores de una función continua en x pasan de un tipo de concavidad a otra. En el caso de la parábola este punto marca la transición donde esta pasa de descender a ascender o viceversa. Es por esto por lo que este punto puede representar un valor mínimo o máximo de la función, si el valor de a es positivo, el vértice de la función será su mínimo valor, si el valor de a es negativo, el vértice de la función será su máximo valor. Suele utilizarse la expresión (h, k) para referirse al vértice. La coordenada del vértice se puede obtener a través de los coeficientes del polinomio de la función de la siguiente forma:

$$\boxed{V\ (h,k) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)}$$

Eje de simetría: El eje de simetría de una parábola es una recta vertical que pasa por su vértice, la divide en dos mitades congruentes y es siempre perpendicular al eje X y paralelo al eje Y. La ecuación de la recta del eje de simetría en función de los coeficientes del polinomio de la función es:

$$\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$$

Intersección con el eje Y: Como toda función, la función cuadrática tiene solo una intersección con el eje Y, esto se da cuando el valor de $x = 0$. Dado que las funciones cuadráticas de una variable que estudiamos tienen la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, el único valor que no se ve afectado por x es c, por lo tanto, el punto de intersección viene dado por:

$$\boxed{(0, c)}$$

Intersecciones con el eje X: La función cuadrática puede tener una, dos o ninguna intersección con el eje X, para saber cuántas tiene se puede emplear el método del discriminante estudiado anteriormente en ecuaciones cuadráticas. $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Si el discriminante es igual a 0, $\Delta = 0$, entonces la función tendrá una intersección con el eje X.

Si el discriminante es mayor que 0, $\Delta > 0$, entonces la función tendrá dos intersecciones con el eje X.

Si el discriminante es menor que 0, $\Delta < 0$, entonces la función no tendrá intersecciones con el eje X.

En la gráfica de la función cuadrática, una intersección con el eje X se da cuando el valor de $y = 0$. Para determinar los puntos se deber resolver la ecuación cuadrática asociada a la función. Por lo tanto, si la ecuación tiene dos soluciones iguales pertenecientes al conjunto de los números reales, la función tendrá una intersección con el eje Y que viene dada por $(x_1, 0)$ con x_1 como solución de la ecuación. Si la ecuación tiene dos soluciones distintas pertenecientes al conjuntos de los números reales, la función tendrá dos intersecciones con el eje Y que vienen dadas por $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ con x_1 y x_2 como soluciones de la ecuación. Si la ecuación tiene dos soluciones distintas pertenecientes al conjunto de los números complejos, entonces la función no tendrá intersecciones con el eje Y.

¿Cómo graficar una función cuadrática?

Ahora que conocemos los elementos de la gráfica de la función cuadrática, veamos el paso a paso para graficar una función. Tomemos como ejemplo la función $f(x) = x^2 - x - 2$.
Lo primero que haremos es identificar los coeficientes; $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$.

El valor de $a = 1$, entonces $a > 1$ por lo que la parábola tiene concavidad positiva, es decir abre "hacia arriba" y por lo tanto tiene un mínimo.

Luego vamos a determinar la coordenada del vértice viene dada por:

$$V\ (h, k) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Reemplazando con los valores de los coeficientes, tenemos:

$$V\ (h, k) = \left(\frac{-(-1)}{2 \cdot (1)}, \frac{4 \cdot (1) \cdot (-2) - (-1)^2}{4 \cdot (1)}\right)$$

Entonces su vértice es el punto:

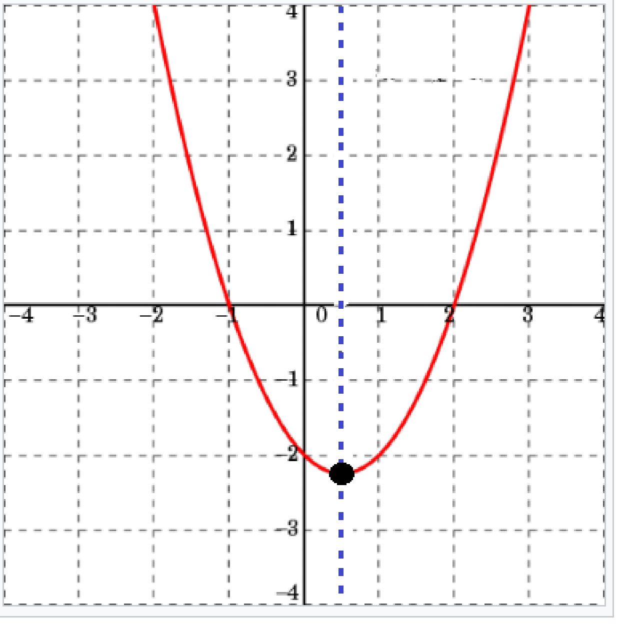
$$V\ (h, k) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{4}\right)$$

Ahora la ecuación de su eje de simetría será: $x = \frac{1}{2}$

Finalmente, las intersecciones con los ejes.
Su punto de intersección con el eje Y viene dado por $(0, c)$, por lo tanto, es $(0, -2)$

Sus intersecciones con el eje X, se obtienen a través de la ecuación cuadrática asociada a la función: $x^2 - x - 2 = 0$, cuyas soluciones son; $x_{1=} - 1, x_2 = 2$ obteniendo así los puntos $(-1{,}0)$ y $(2{,}0)$.

Para comprender mejor el ejemplo puedes ver un video en el siguiente link:
https://youtu.be/PGvUJ77dfeE



¡Que tengan una muy buena semana!