San Fernando College
Departamento de Matemática.
Profesora: Gloria González Tejos

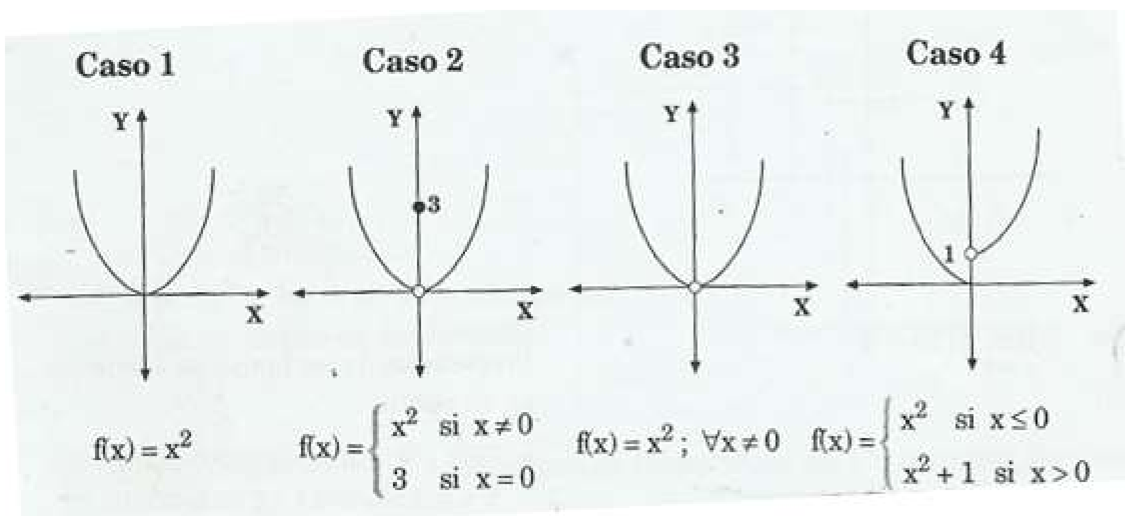
Guía N°18 Tercero Límite, Derivada e Integrales

Titulo : Continuidad de una función real		
Nombre:	**Fecha :** 10 de Agosto 2020	
Contenidos	**Objetivo de Aprendizaje**	**Habilidades**
Función real	*Determinar la continuidad de una función real.*	*Analizar- Aplicar - Inferir- Argumentar*

En forma intuitiva, decimos que una función real es **continua** cuando su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Si este proceso no puede realizarse, es decir, si en algún punto hay una interrupción, decimos que la función no es continua en ese punto o que tiene un punto de discontinuidad.

<u>Continuidad de una función real en un punto del dominio:</u>

Consideremos los gráficos de las siguientes funciones:



Estos gráficos son muy similares, pero observamos que en **x = 0** presentan un comportamiento distinto.

Caso 1

El límite de la función en $x = 0$ es cero. Además el valor de la función en ese punto **existe** y es igual a 0

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad y \quad f(0) = 0$$

Caso 2

Observamos que en el punto de la abscisa $x = 0$ la curva se interrumpe. El límite de la función en $x = 0$ **existe** y es cero pero **no coincide con el valor de la función en ese punto que es 3.**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad y \quad f(0) = 3$$

Caso 3

Al tomar el valor de $x = 0$ la curva se interrumpe. El límite de la función en $x = 0$ **existe** y es cero pero **no existe el valor de la función en $\boldsymbol{x = 0}$**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad y \quad \nexists f(0)$$

Caso 4

Los límites laterales de la función en $x = 0$ son diferentes, por lo cual **no existe el límite en $\boldsymbol{x = 0}$,** aun cuando existe el valor de la función en ese punto.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \;\; y \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$; luego no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ aun cuando $f(0) = 0$

En los casos 2, 3 y 4 la función respectiva es discontinua en $x = 0$

En general,

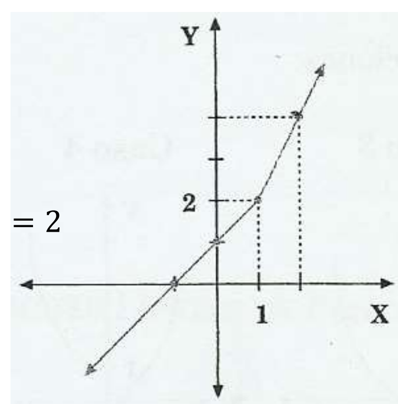
*Si D_f es el dominio de la función $y = f(x)$ y $f(a)$ $su\ valor\ para\ x = a$,entonces: Una función real se denomina **continua en $\boldsymbol{x = a}$** si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

1. $\exists f(a);\; a \in D_f$	2. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$	3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ejemplos:

- Sea $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \leq 1 \\ 2x & si\ x > 1 \end{cases}$

  ¿Es $f(x)$continua en $x = 1$?
  Para saberlo debemos comprobar las tres condiciones

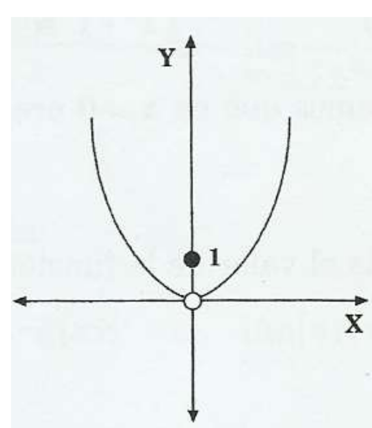
  

  1. Existe $f(1)$, $\quad f(1) = 1 + 1 = 2$
  2. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$; $\quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$, $\quad$ luego $\exists \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$
  3. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$

  Por lo tanto, $\boldsymbol{f(x)}$ $\boldsymbol{es\ continua\ en\ x = 1}$

- Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$

  ¿Es $f(x)$continua en $x = 0$?

  Comprobamos las tres condiciones:

  1. Existe $f(0)$, $\; f(0) = 1$
  2. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{0^+} f(x)$; luego $\exists \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
  3. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

     Por lo tanto $\boldsymbol{f(x)}$ $\boldsymbol{es\ no\ continua\ en\ x = 0}$

Propiedades de las funciones continuas en un punto

a) Si f y g son funciones continuas en $x = a$, entonces $f \pm g$ es continua en $x = a$
b) Si f es función continua en $x = a$ entonces $(-f)$ es continua en $x = a$
c) Si $c \in \mathbb{R}$, y f es continua $en\ x = a$, entonces $c \cdot f$ es continua en $x = a$
d) Si f y g son funciones continuas en $x = a$, entonces $f \cdot g$ es continua en $x = a$
e) Si f y g son funciones continuas en $x = a$, y $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en $x = a$

Ejercicios:

1.- ¿Es continua la función $f(x) = \begin{cases} x & si\ \ x > 0 \\ 0 & si\ x\ \leq 0 \end{cases}$ en $x = 0\ \ y\ en\ \ x = 3$

2.- Estudia la continuidad de cada función real en el punto cuya abscisa se indica:

i) $f\ (x) = \frac{x+2}{x-4} \quad en\ x = 4$

ii) $f(x) = \begin{cases} 2x & si\ \ x \geq 1 \\ x + 3 & si\ x < 1 \end{cases} \quad en\ x = 1$

iii) $f\ (x) = \frac{x-1}{x+3} \quad en\ x = 2$

iv) $f(\ x) = x + 3 \quad en\ x = \ -3$

v) $f(x)\ = 3x + 2 \quad en\ x = \ -\frac{3}{2}$

vi) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & si\ \ x \leq 0 \\ 3 & si\ x > 0 \end{cases} \quad en\ x = 0$

Observación: basta que una de las condiciones no se cumpla para que la función sea discontinua.

Respuestas:

i) No
ii) No
iii) Si
iv) Si
v) Si
vi) No

Te recuerdo que puedes hacer consulta al correo ggonzalez@sanfernandocollege.cl, o al whatsapp del curso. Dejo acá un link que complementa la guía
https://www.youtube.com/watch?v=_POgjEljphA