San Fernando College
Departamento de Matemática.
Gloria González Tejos

GUIA N°7 : CUARTO BIOLOGO - MATEMATICO

1 de Junio 2020

SUCESIONES MONÓTONAS Y ACOTADAS

- Una sucesión $\{a_n\}$ es **creciente** si satisface que:

$$\boxed{\boldsymbol{a_n \leq a_{n+1}}, \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$$

Esto es, si cada término de la sucesión es mayor o igual que el anterior.

- Una sucesión $\{a_n\}$ es **decreciente** si satisface que:

$$\boxed{\boldsymbol{a_n \geq a_{n+1}}, \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$$

Es decir, si cada término es igual o menor que el anterior

- Una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

Ejemplo:

La sucesión $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2} . \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$ es una sucesión monótona creciente, ya que para cualquier valor de **n** que pertenece a $\mathbb{N}$ se tiene que:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)-1}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2-(n-1)(n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2-(n^2-1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n^2+1} \geq 0$$

Y como $\frac{1}{n^2+1}$ es siempre positivo, se concluye que $a_{n+1} - a_n \geq 0$,o equivalente, $a_{n+1} \geq a_n$. Para cualquier valor de **n** que pertenece a $\mathbb{N}$.

San Fernando College
Departamento de Matemática.
Gloria González Tejos

Sucesiones Acotadas:

- Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada superiormente** si existe un **M** $\in \mathbb{R}$**,** tal que $\boldsymbol{a_n} \leq$ **M,** para todo $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

- Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada inferiormente** si existe un **m** $\in \mathbb{R}$**,** tal que **m** $\leq \boldsymbol{a_n}$**,** para todo $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

- Una sucesión es **acotada** cuando lo es superior e inferiormente

Ejemplo:

1. La sucesión $\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ está acotada inferiormente por **m = -1** y superiormente por **M = 1**

2. La sucesión definida por recurrencia como

$$\boldsymbol{a_1 = -1}\ , \qquad \boldsymbol{a_2 = 1} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{a_{2n+1} = 2\, a_{2n+2} = \frac{a_{2n}}{2}}$$

Es acotada superiormente pero **no** inferiormente, ya que la sucesión resultante es:

$$-1\,, 1\,, -2\,, \frac{1}{2}\,, -4\,, \frac{1}{4}\,, -8\,, \frac{1}{8}\,, -16\,, \frac{1}{16}\,, -32, \ldots$$

La cual contiene valores negativos que son cada vez menores

3. La sucesión $\left\{\frac{2^n-1}{2^n}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$ es una sucesión acotada pues todos los términos de esta son positivos, y por ello **m = 0** es una cota inferior. Por otra parte, a medida que **n** toma valores más grandes, cada término de la sucesión se acerca a **1.** Luego, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$\frac{2^n-1}{2^n} < 1$ por lo que se puede afirmar que **M = 1** es una cota superior para esta sucesión.

Ejercicios:

I.- Encontrar los 5 primeros términos de cada sucesión.

a) $\{a_n\} = 3n - 2$
b) $\{c_n\} = n^2 - 1$
c) $\{e_n\} = \frac{1}{n+1}$
d) $\{f_n\} = \frac{n}{n+1}$
e) $\{h_n\} = \frac{n-1}{n+2}$
f) $\{i_n\} = \frac{n^2}{n+1}$
g) $\{j_n\} = \frac{2^n}{n^2}$

h) $\{k_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$

i) $\{d_n\} = (-1)^n(n^2 + 1)$

j) $\{p_n\} = \begin{cases} 1, si\ n\ es\ par \\ \frac{2}{n+2}, si\ n\ es\ impar \end{cases}$

II.- Encontrar los cinco primeros términos de cada sucesión dada por **recurrencia**

a) $\boldsymbol{a_1 = 2}$; $\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n - 1}$

b) $\boldsymbol{a_1 = 1}$; $\boldsymbol{a_{n+1} = 3a_n + 1}$

c) $\boldsymbol{a_1 = \frac{7}{2}}$; $\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n - 3}$

d) $\boldsymbol{a_1 = 2}$; $\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{-1}{a_n}}$

e) $\boldsymbol{a_1 = 1}$; $\boldsymbol{a_2 = 3}$; $\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}\ (n \geq 2)}$

III.- Mediante simple inspección de los términos encontrados, conjeturar acerca de cuáles de las sucesiones de los ejercicios I y II son monótonas crecientes, decrecientes o ninguna de las anteriores.

IV.- Por simple inspección de los términos de las sucesiones del ejercicio II, conjeturar si estas son acotadas o no acotadas

Link para complementar lo tratado en la guía: https://www.youtube.com/watch?v=QAvstIlVhsI