GUIA N° 1 : CUARTO BIÓLOGO Y MATEMÁTICO

Operaciones de matrices

Esta es una Guía Teórica que te permitirá aprender las operaciones básicas de Matrices. Debes estudiarla con comprensión y análisis.La siguiente guía será de ejercicios. Si tienes alguna duda debes consultar al profesor correspondiente ggonzalez@sanfernandocollege.cl , mosorio@sanfernandocollege.cl.

Suma de matrices

Dadas dos matrices de la misma dimensión, $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$, se define la matriz suma como: $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$. Es decir, aquella matriz cuyos elementos se obtienen sumando los elementos de las dos matrices que ocupan la misma misma posición (suma elemento a elemento).

Ejemplo:

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&5\\7&3&1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0&1&4\\-4&3&5\\8&-3&1\end{pmatrix}$$

su suma estaría dada por

$$\begin{aligned}A+B&=\begin{pmatrix}1+0&2+1&1+4\\0-4&1+3&5+5\\7+8&3-3&1+1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&3&5\\-4&4&10\\15&0&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Propiedades

-
  - Asociativa: Dadas las matrices A, B y C se cumple que

$$A+(B+C)=(A+B)+C.$$

-

- Elemento neutro: Existe una matriz, denotada por 0, tal que, para toda matriz A, si hacemos su suma obtenemos

$$A + 0 = A.$$

Los elementos de la matriz 0 son puros ceros.

- Inverso aditivo: Para toda matriz A, existe una matriz $-A = (-a_{ij})$, llamada inverso aditivo de A, la cual cumple que

$$A + (-A) = A - A = 0.$$

Los elementos de la matriz $-A$ son los elementos de A multiplicados por -1.

- Conmutativa: Dadas las matrices A y B se cumple que

$$A + B = B + A.$$

Producto de un número real por una matriz

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ y un número real $k \in \mathbb{R}$, se define el producto de un número real por una matriz: a la matriz del mismo orden que A, en la que cada elemento está multiplicado por k, en otras palabras $k = kA = (k \cdot a_{ij})$.

Ejemplo:

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

y el escalar real 5, la multiplicación estaría dada por

$$\begin{aligned} 5A &= 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1)(5) & (2)(5) & (1)(5) \\ (0)(5) & (1)(5) & (5)(5) \\ (7)(5) & (3)(5) & (1)(5) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 25 \\ 35 & 15 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Propiedades

-
    - Asociativa escalar: Dada la matriz A y los escalares a y b, se cumple que

$$a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A.$$

-
    - Distributividad en los escalares: Dada la matriz A y los escalares a y b, se cumple que

$$(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A.$$

-
    - Distributividad en las matrices: Dadas las matrices A y B y el escalar a, se cumple que

$$a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B.$$

- Escalar neutro: Dada la matriz A y el escalar 1, se cumple que

$$1 \cdot A = A.$$

Producto de matrices

Dos matrices A y B se dicen multiplicables si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.

La multiplicación de dos matrices multiplicables $A_{m \times n}$ y $B_{n \times p}$ es una nueva matriz, $C_{m \times p}$ que tiene la misma cantidad de filas que A y la misma cantidad de columnas que B.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

El elemento c_{ij} de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la matriz A por cada elemento de la columna j de la matriz B y sumándolos $\left(c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}\right)$.

Ejemplo:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -4 & 3 & 5 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

su multiplicación estaría dada por

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (1)(0)+(2)(-4)+(1)(8) & (1)(1)+(2)(3)+(1)(-3) & (1)(4)+(2)(5)+(1)(1) \\ (0)(0)+(1)(-4)+(5)(8) & (0)(1)+(1)(3)+(5)(-3) & (0)(4)+(1)(5)+(5)(1) \\ (7)(0)+(3)(-4)+(1)(8) & (7)(1)+(3)(3)+(1)(-3) & (7)(4)+(3)(5)+(1)(1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 15 \\ 36 & -12 & 10 \\ -4 & 13 & 44 \end{pmatrix}$$

Propiedades

- Asociativa: Dadas las matrices A, B y C, se cumple que

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

- Elemento netro: Dada la matriz $A_{m \times n}$ existe una matriz $I_{n \times n}$ tal que se cumple que

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

En donde la matriz I tiene puros 1 en la diagonal y 0 en cualquier otra posición

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- No es conmutativa: Dadas las matrices A y B, para la mayoría de los casos se cumple que

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

- Distributividad del producto respecto a la suma: Dadas las matrices A, B y C se cumple que

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A.$$

Matriz inversa

Sea $A_{n\times n}$ una matriz con la misma cantidad de filas que de columnas. Si existe una matriz, denotada por A^{-1}, que cumple que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

en donde I es el neutro multiplicativo, decimos que A es invertible o regular. Además, a A^{-1} la llamamos matriz inversa de A.

Ejemplo:

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su matriz inversa está dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para comprobarlo, veamos que

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} (1)(1)+(1)(0)+(0)(-1) & (1)(0)+(1)(0)+(0)(1) & (1)(-1)+(1)(1)+(0)(1) \\ (1)(1)+(0)(0)+(1)(-1) & (1)(0)+(0)(0)+(1)(1) & (1)(-1)+(0)(1)+(1)(1) \\ (0)(1)+(1)(0)+(0)(-1) & (0)(0)+(1)(0)+(0)(1) & (0)(-1)+(1)(1)+(0)(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Propiedades

- $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$
- $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-T}$

Tipos de matrices

1. Matriz fila

Es una matriz constituida por una sola fila.

$$A_{1n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

2. Matriz columna

$$A_{1n} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

3. Matriz rectangular

Aquella matriz que tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su dimensión $m \times n, \quad m \neq n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 11 \\ 4 & 3 & 10 & -2 \\ 5 & 6 & -8 & 24 \end{pmatrix}$$

4. Matriz cuadrada

La que tiene el mismo número de filas que de columnas.

Los elementos de la forma a_{ii} constituyen la diagonal principal.

La diagonal secundaria la forman los elementos cuyos subíndices cumplen con $i + j = n + 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Matriz nula

Todos los elementos son nulos (cero).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

en donde $a_{ij} = 0$ para todo i y j.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Matriz triangular superior

Los elementos situados por debajo de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que, como la definición depende de la diagonal principal, entonces la matriz debe de ser cuadrada.

7. Matriz triangular inferior

Los elementos situados por arriba de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que, como la definición depende de la diagonal principal, entonces la matriz debe de ser cuadrada.

8. Matriz diagonal

Todos los elementos situados por encima y por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al tratarse de matrices triangulares, son matrices cuadradas.

9. Matriz escalar

Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Al tratarse de una matriz diagonal, es una matriz cuadrada.

10. Matriz identidad o unidad

Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al tratarse de una matriz escalar, es una matriz cuadrada.

11. Matriz traspuesta

Dada una matriz A, se llama traspuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas (la primer fila se convertirá en la primer columna, la segunda fila en la segunda columna y así sucesivamente). Si tenemos la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

su matriz transpuesta, denotada por A^T, está dada por

$$A^T = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1m} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

su matriz traspuesta es

$$A^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

12. Matriz regular :

Es aquella matriz cuadrada que tiene inversa.

13. Matriz singular

Es aquella que no tiene matriz inversa. Por ejemplo, ninguna matriz rectangular (no cuadrada) tiene inversa (se necesita ser cuadrada para tener inversa).

14. Matriz idempotente

Una matriz idempotente es aquella que cumple que

$$A^2 = A$$

Ejemplo:

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

Notemos que

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} (1)(1) + (0)(3)+ & (1)(0) + (0)(0) \\ (3)(1) + (0)(3)+ & (3)(0) + (0)(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

15. Matriz involutiva

Una matriz involutiva es aquella que cumple que

$$A^2 = I$$

Ejemplo:

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Notemos que

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} (1)(1) + (-1)(0)+ & (1)(-1) + (-1)(-1) \\ (0)(1) + (-1)(0)+ & (0)(-1) + (-1)(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

16. Matriz simétrica

Una matriz simétrica es aquella que cumple que

$$A^T = A$$

Ejemplo:

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix},$$

Notemos que

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

.

17. Matriz antisimétrica o hemisimétrica

Una matriz antisimétrica es aquella que cumple que

$$A^T = -A$$

Ejemplo:

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 3 \\ 7 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Notemos que

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{pmatrix} 0 & 7 & -3 \\ -7 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -A \end{aligned}$$

.

18. Matriz ortogonal

Una matriz ortogonal es aquella que cumple que

$$A \cdot A^T = I$$

Ejemplo:

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Notemos que su traspuesta es

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Multiplicando A por su traspuesta A^T obtenemos

$$\begin{aligned} A \cdot A^T &= \begin{pmatrix} (0)(0) + (1)(1) & (0)(-1) + (1)(0) \\ (-1)(0) + (0)(1) & (-1)(-1) + (0)(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$